

N^o D'ORDRE :
1894

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. HENRI EYRAUD

Professeur au Lycée Henri IV.

1^{re} THÈSE. — PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — LES ESPACES MÉTRIQUES
ET LES THÉORIES PHYSICO-GÉOMÉTRIQUES.

2^e THÈSE. — APPLICATION DES ÉQUATIONS INTÉGRALES A LA PHYSIQUE
MATHÉMATIQUE.

Soutenues le **10 JUIN** 1926, devant la Commission d'Examen.

MM. EMILE BOREL, *Président.*
E. CARTAN, } *Examineurs.*
LÉON BLOCH, }

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ALBERT BLANCHARD

3 et 3^{bis}, Place de la Sorbonne

1926

N^o D'ORDRE :

1894

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. HENRI EYRAUD

Professeur au Lycée Henri IV.

1^{re} THÈSE. — PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — LES ESPACES MÉTRIQUES
ET LES THÉORIES PHYSICO-GÉOMÉTRIQUES.

2^e THÈSE. — APPLICATION DES ÉQUATIONS INTÉGRALES A LA PHYSIQUE
MATHÉMATIQUE.

Soutenues le 10 JUIN 1926, devant la Commission d'Examen.

MM. EMILE BOREL, *Président.*

E. CARTAN,
LÉON BLOCH, } *Examineurs.*

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ALBERT BLANCHARD

3 et 3^{bis}, Place de la Sorbonne

1926

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen. M. MOLLIARD, Professeur. . . . Physiologie végétale.

Doyen honoraire. P. APPELL.

Professeurs honoraires. P. PUISEUX.

. . . . V. BOUSSINESQ.

. . . . A. JOANNIS.

. . . . H. LE CHATELIER

. . . . H. LEBESGUE.

. . . . A. FERNBACH.



ÉMILE PICARD. . . . Analyse supérieure et algèbre supérieure.

G. KOENIGS. . . . Mécanique physique et expérimentale.

E. GOURSAT. . . . Calcul différentiel et calcul intégral.

P. JANET. . . . Électrotechnique générale.

F. WALLERANT. . . . Minéralogie.

H. ANDOYER. . . . Astronomie.

P. PAINLEVÉ. . . . Mécanique analytique et mécan. céleste.

E. HAUG. . . . Géologie.

GABRIEL BERTRAND. . . . Chimie biologique.

M^{me} P. CURIE. . . . Physique générale et radioactivité.

M. CAULLERY. . . . Zoologie (Évolution des êtres organisés).

C. CHABRIE. . . . Chimie appliquée.

G. URBAIN. . . . Chimie minérale.

ÉMILE BOREL. . . . Calcul des probabilités et Physique math.

L. MARCHIS. . . . Aviation.

JEAN PERRIN. . . . Chimie physique.

H. ABRAHAM. . . . Physique.

E. CARTAN. . . . Géométrie supérieure.

L. LAPICQUE. . . . Physiologie générale.

Professeurs. E. VESSIOT. . . . Théorie des groupes et calcul des variat.

A. COTTON. . . . Physique générale.

J. DRACH. . . . Application de l'analyse à la géométrie.

CHARLES FABRY. . . . Physique.

CHARLES PÉREZ. . . . Zoologie.

A. LEDUC. . . . Physique théorique et physique céleste.

LÉON BERTRAND. . . . Géologie appliquée et géologie régionale.

R. LESPIEAU. . . . Théories chimiques.

E. RABAUD. . . . Biologie expérimentale.

P. PORTIER. . . . Physiologie comparée.

E. BLAISE. . . . Chimie organique.

P.-A. DANGEARD. . . . Botanique.

C. MAURAIN. . . . Physique du globe.

P. MONTEL. . . . Mécanique rationnelle.

P. WINTREBERT. . . . Anatomie et histologie comparées.

O. DUBOSQ. . . . Biologie maritime.

M. TIFFENEAU. . . . Chimie (Enseignement P. C. N.).

G. JULIA. . . . Mathématiques générales.

A. JOB. . . . Chimie générale.

N. . . . Géographie physique.

E. HÉROUARD. . . . Zoologie.

RÉMY PERRIER. . . . Zoologie (Enseignement P. C. N.).

G. SAGNAC. . . . Physique théorique et physique céleste.

E. PÉCHARD. . . . Chimie (Enseignement P. C. N.).

V. AUGER. . . . Chimie analytique.

M. GUICHARD. . . . Chimie minérale.

A. GUILLET. . . . Physique.

C. MAUGUIN. . . . Minéralogie.

L. BLARINGHEM. . . . Botanique.

A. MICHEL-LÉVY. . . . Pétrographie.

A. DEREIMS. . . . Géologie.

R. DONGIER. . . . Physique du globe.

Secrétaire. DANIEL TOMBECK.

A MA FEMME

A M. EMILE BOREL

MEMBRE DE L'INSTITUT

EN TÉMOIGNAGE DE PROFONDE GRATITUDE

TABLE DES MATIÈRES

	Pages.
INTRODUCTION.	3

CHAPITRE I.

§ 1. — Espace amorphe et espace métrique.	7
§ 2. — Espace à connexion affine.	11
§ 3. — Dérivation covariante et opérateurs linéaires plus généraux.	15
§ 4. — Rotation. Théorèmes de Stokes-Poincaré. Divergence.	23
§ 5. — L'espace métrique de H. Weyl.	25
§ 6. — Transformations isométrique, projective, conforme.	27
§ 7. — Les métriques généralisées. Espace axonométrique.	29
§ 8. — Déformation axiale et déformation axonométrique.	33

CHAPITRE II.

§ 1. — La dynamique de l'éther.	36
§ 2. — Équation générale de la gravitation.	44
§ 3. — Les composantes de l'énergie totale.	48
§ 4. — L'électrodynamique de Lorentz.	50
§ 5. — L'électrodynamique de l'atome.	53

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

LES ESPACES MÉTRIQUES

ET LES THÉORIES PHYSICO-GÉOMÉTRIQUES

INTRODUCTION

Les généralisations de la notion d'espace se sont montrées surtout fécondes en partant de deux points de vue différents.

D'une part on peut introduire dans l'espace amorphe, tel que l'envisage la topologie, une *métrique*, c'est-à-dire une forme quadratique différentielle servant à définir partout la notion de *longueur*. On est alors conduit à faire l'étude d'espaces très généraux que l'on appelle des espaces de Riemann.

On peut obtenir une généralisation beaucoup plus large, en introduisant d'autre part, avec Hermann Weyl, une connexion affine, c'est-à-dire une loi différentielle qui permette de comparer entre eux des vecteurs placés en des points infiniment voisins.

Les deux points de vue se rejoignent dans une certaine mesure; dans un espace de Riemann donné, une connexion affine ⁽¹⁾ se trouve tout naturellement introduite par la condition que le déplacement parallèle qui en résulte conserve les longueurs des vecteurs déplacés. Mais inversement il n'est pas possible en général de déduire une métrique de Riemann d'une connexion affine donnée, la condition précédente étant supposée maintenue. Une métrique de Riemann fait correspondre en effet à chaque point de l'espace une quadrique infinitésimale qui est le lieu des points de l'espace qui sont à la distance unité du point donné (on doit prendre une unité infinitésimale); pour qu'une connexion affine permette une métrique de Riemann, il faut donc qu'on puisse

(1) Encore faut-il ajouter la condition que la connexion affine soit sans torsion (voir § 2).

définir un champ de quadriques, de telle sorte que la quadrique attachée à un point M se déduise de la quadrique attachée à un autre point N, par le déplacement parallèle suivant un chemin quelconque. Il est clair que si la connexion affine est quelconque, le déplacement parallèle d'une quadrique le long d'un contour fermé ne donnera pas une quadrique identique à celle d'où l'on est parti. Pour que ce fait ait lieu, il faut que les composantes de la connexion affine satisfassent à un certain nombre de relations différentielles.

Dans certains cas où ces conditions différentielles ne sont pas réalisées, on peut définir cependant des métriques en adoptant un point de vue plus large que celui de Riemann. On pourra par exemple introduire une métrique de Weyl lorsque le déplacement parallèle d'une quadrique le long d'un contour fermé donne toujours une quadrique homothétique de la quadrique initiale.

La première partie de ce travail est consacrée à l'examen des métriques généralisées qu'on peut établir dans un espace à connexion affine. Les premiers paragraphes mettent en évidence le rôle de la notion de torsion, introduite par M. Cartan, dans les formules de calcul différentiel absolu que nous aurons à utiliser dans la deuxième partie.

Nous abordons au chapitre II le domaine de la Physique mathématique; nous avons cherché à apporter une très modeste contribution à la théorie de la relativité généralisée, en montrant la nécessité de l'introduction de la notion de torsion pour rendre compte des phénomènes électriques et dégager le caractère géométrique des grandeurs qui figurent dans les équations de Maxwell. Une tentative du même ordre avait été faite par M. Schouten ⁽¹⁾; cet auteur a conclu, comme M. Hermann Weyl lui-même, au caractère riemannien conforme de l'espace qui sert de support aux actions électromagnétiques. Nous confirmons ce résultat, mais nous montrons de plus que cet espace est aussi projectivement riemannien, de sorte qu'il existe toujours un espace de Riemann ayant les mêmes lignes isotropes (rayons lumineux) et les mêmes lignes géodésiques (orbites de la chute

⁽¹⁾ J.-A. SCHOUTEN, *Kon. Ak. v. Wet. Amsterdam, Proc.*, t. XXVI, 1923, p. 850.

libre) que l'éther lui-même. L'éther aurait donc plus de ressemblance encore avec un espace de Riemann que ne l'ont pensé les auteurs que nous venons de citer.

C'est le principe de Hamilton qui nous a conduit à la connaissance du véritable caractère géodésique de l'éther. Il nous a fourni en effet, à côté des deux systèmes d'équations électromagnétiques de Maxwell, les deux systèmes correspondants d'équations gravifiques; l'ensemble constitue le système complet des équations de la dynamique de l'éther. Or le second système des équations gravifiques exprime précisément que l'éther est applicable projectivement et conformément sur un espace de Riemann.

Dans un tel espace l'expression de l'énergie prend une forme tout aussi simple que dans l'espace de Riemann ordinaire. Nous avons donné cette expression de l'énergie. Nous l'avons décomposée en une énergie du champ électromagnétique et une énergie de courant (ou énergie électronique). Nous avons montré qu'il n'y avait pas d'autre forme d'énergie.

La constante cosmologique d'Einstein joue dans notre théorie un rôle fondamental. Nous avons supposé qu'elle était nulle dans le vide, et très grande dans l'atome, et nous avons pensé que les lois électromagnétiques à l'intérieur de l'atome devaient devenir les lois de l'éther lorsqu'on faisait tendre vers zéro la constante cosmologique. Cet artifice nous a permis d'écrire des lois valables dans l'atome; nous ne sommes pas parvenu toutefois à voir nettement comment ces lois peuvent se concilier avec les phénomènes de quanta.

Quelque arbitraires que paraissent au lecteur les hypothèses que nous avons proposées en cours de route, nous espérons l'avoir convaincu de la nécessité de faire jouer un rôle physico-mathématique important à la torsion dont la notion a été si opportunément greffée par M. Cartan ⁽¹⁾ à la notion de connexion affine de M. H. Weyl ⁽²⁾.

(1) CARTAN, Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. *Annales de l'École normale supérieure* (3^e série), tome XL (1923).

(2) L'ouvrage de M. H. WEYL, *Raum. Zeit. Materie* (Springer, Berlin) contient une large bibliographie des théories physico-géométriques. Voir aussi : PAULY, *Encyk. der Math. Wissensch.*, B. V₂, H. 4; EDDINGTON, *The Mathematical Theory of Relativity*. Cambridge, 1923, University Press.



CHAPITRE I

§ 1. — ESPACE AMORPHE ET ESPACE MÉTRIQUE.

Un ensemble de n nombres pris dans un ordre déterminé constitue un point de l'espace à n dimensions. Les n nombres sont les coordonnées de ce point. Si ces n coordonnées varient indépendamment les unes des autres on dit que le point M décrit l'espace n dimensionnel. Soient x^i les coordonnées du point M ($i = 1, 2, \dots, n$); les points infiniment voisins de M s'obtiendront en donnant aux coordonnées x^i des accroissements infiniment petits arbitraires dx^i . Soit M^1 un tel point, $x^i + dx^i$ ses coordonnées; nous dirons que les points MM^1 définissent un vecteur infinitésimal MM^1 attaché au point M , et de composantes dx^i .

Substituons aux coordonnées x^i de nouvelles coordonnées x'^i par des formules de transformation à déterminant fonctionnel non nul :

$$(1) \quad x^i = x^i(x'_1 x'_2 \dots x'_n)$$

de sorte qu'on puisse résoudre inversement dans les x'^i

$$(2) \quad x'^i = x'^i(x_1 x_2 \dots x_n)$$

les composantes des vecteurs MM^1 sont transformées par les formules ⁽¹⁾

$$(3) \quad dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \cdot dx'^k$$

c'est-à-dire par une substitution linéaire. L'ensemble des vec-

⁽¹⁾ On sous-entend toujours le signe de sommation relativement à un indice k qui figure en haut et en bas.

teurs infinitésimaux attachés au point M définit donc un espace affine attaché au point M que nous pouvons appeler l'espace affine tangent en M à l'espace considéré.

Dans cet espace la notion de vecteur et de tenseur, covariant, contrevariant, ou mixte est parfaitement déterminée. En différentiant (2) on aurait

$$(4) \quad dx'^k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \cdot dx^i$$

cette formule n'est autre que la formule (3) résolue par rapport aux dx'^n . Les $\frac{\partial x'^n}{\partial x^i}$ sont ainsi les mineurs normalisés du déterminant des $\frac{\partial x^i}{\partial x'^n}$ et l'on a comme dans la théorie élémentaire

$$(5) \quad \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \cdot \frac{\partial x'^k}{\partial x^p} = \varepsilon_p^i = 0 \quad \text{si } p \neq i, \quad = 1 \quad \text{si } p = i.$$

Nous appellerons « scalaire » une fonction de point qui conserve la même valeur numérique par tout changement de coordonnées.

Nous appellerons champ vectoriel contrevariant (ou plus brièvement vecteur contrevariant) un ensemble de n fonctions de point ξ^i dont les valeurs numériques, par un changement de coordonnées quelconque, sont transformées par les formules

$$(6) \quad \xi^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \cdot \xi'^k$$

ou par les formules équivalentes :

$$(7) \quad \xi'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \cdot \xi^k.$$

On définira de même un champ vectoriel covariant par les formules

$$(8) \quad \eta_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \cdot \eta'_{ik},$$

$$(9) \quad \eta_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \cdot \eta'_{ik}.$$

Enfin, plus généralement, la notion de champ tensoriel mixte est liée à des formules de transformation telles que

$$(10) \quad R'_{ikh} = R_{lpq}^{rs} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \cdot \frac{\partial x^p}{\partial x'^k} \cdot \frac{\partial x^q}{\partial x'^h} \cdot \frac{\partial x'^m}{\partial x^r} \cdot \frac{\partial x'^n}{\partial x^s}.$$

Les règles habituelles du calcul des tenseurs (multiplication, compensation des indices, contraction) résultent directement de (10) et (5).

À côté du vecteur ou élément linéaire simple, on considère des éléments linéaires double, triple, ... définis respectivement à l'aide de deux, trois, ... vecteurs $\xi^i, \eta^i, \zeta^i, \dots$ par des formules :

$$(11) \quad \sigma^{ik} = \begin{vmatrix} \xi^i & \xi^k \\ \eta^i & \eta^k \end{vmatrix} \quad \tau^{ikl} = \begin{vmatrix} \xi^i & \xi^k & \xi^l \\ \eta^i & \eta^k & \eta^l \\ \zeta^i & \zeta^k & \zeta^l \end{vmatrix}$$

ils permettent de définir des tenseurs linéaires, pour lesquels les indices peuvent s'associer en groupes linéaires. On aura des formules de transformation telles que les suivantes :

$$(12) \quad T_{(ikh)}^{(mn)} = T_{(lpq)}^{(rs)} \cdot \frac{1}{2!3!} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x'^m}{\partial x^r} & \frac{\partial x'^n}{\partial x^r} \\ \frac{\partial x'^m}{\partial x^s} & \frac{\partial x'^n}{\partial x^s} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x'^l}{\partial x'^i} & \frac{\partial x'^p}{\partial x'^i} & \frac{\partial x'^q}{\partial x'^i} \\ \frac{\partial x'^l}{\partial x'^k} & \frac{\partial x'^p}{\partial x'^k} & \frac{\partial x'^q}{\partial x'^k} \\ \frac{\partial x'^l}{\partial x'^h} & \frac{\partial x'^p}{\partial x'^h} & \frac{\partial x'^q}{\partial x'^h} \end{vmatrix}$$

de sorte que l'expression

$$T_{(ikh)}^{(mn)} \cdot \tau^{(ikh)} \sigma_{(mn)}$$

serait invariante par tout changement de coordonnées.

Densité tensorielle. — Nous aurons fréquemment à considérer à côté des tenseurs généraux, les tenseurs dans lesquels figure linéairement un groupe de n indices covariants, n étant le nombre des dimensions de l'espace. On omet alors d'écrire ce groupe d'indices et on dit que l'on a affaire à une densité tensorielle. Nous représenterons par la suite avec une majuscule italique une densité tensorielle. Par exemple la densité tensorielle scalaire $\mathcal{A}$ est une fonction qui, par un changement de coordonnées, se trouve multipliée par le déterminant fonctionnel de la transformation :

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cdot \frac{D(x)}{D(x')}$$

de sorte que l'expression

$$\mathcal{A} \cdot dx^1 \cdot dx^2 \dots dx^n$$

est un invariant par tout changement de coordonnées.

Si u_{ik} est un tenseur covariant du 2^e ordre, et si on forme le

déterminant u des éléments u_{ik} , $k = 1, 2, \dots, n$, on voit sans peine que $\sqrt{u}$ est une densité tensorielle, car

$$\sqrt{u'} = \sqrt{u} \cdot \frac{D(x)}{D(x')}.$$

Dans l'espace amorphe on ne peut parler de longueur d'un vecteur, de produit scalaire ni d'angle de deux vecteurs. Ces notions ne prennent un sens que si l'on introduit une « métrique » sous la forme d'un champ tensoriel covariant symétrique du second ordre g_{ik} que nous appelons le tenseur fondamental, et si l'on définit le produit scalaire de deux vecteurs contrevariants ξ^i , η^i par la formule

$$(13) \quad (X, Y) = g_{ik} \cdot \xi^i \cdot \eta^k.$$

A tout vecteur X de composantes ξ^i correspond le scalaire (XX) qu'on appelle le carré de la longueur du vecteur.

En même temps que les composantes covariantes g_{ik} il est commode d'introduire les mineurs « normalisés » du déterminant g des éléments g_{ik} , c'est-à-dire les composantes contrevariantes g^{ik} telles que l'on ait

$$(14) \quad g_{ip} \cdot g^{pk} = \delta_i^k$$

La donnée du tenseur fondamental permet l'opération d'abaissement ou d'élévation d'un indice quelconque ; par exemple on pose

$$(15) \quad \xi_i = g_{ik} \cdot \xi^k$$

$$(16) \quad \eta^i = g^{ik} \cdot \eta_k$$

et on ne considère pas comme distincts deux tenseurs qui se déduisent l'un de l'autre par abaissement ou élévation d'un indice. En particulier le tenseur fondamental peut être représenté soit par ses composantes covariantes, soit par ses composantes contrevariantes g^{ik} .

Les formules de transformation de ces composantes sont, conformément à (10)

$$(17) \quad g'_{mn} = g_{ik} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x'^n}, \quad g^{ik} = g'^{mn} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x'^n}.$$

Notons encore la formule de transformation de la racine carrée du déterminant des éléments g_{ik} .

$$(18) \quad \sqrt{g'} = \sqrt{g} \cdot \frac{D(x)}{D(x')}$$

la quantité $\sqrt{g}$ se transforme comme une densité scalaire ; elle se trouve, par un changement de variables, multipliée par le déterminant fonctionnel de la transformation.

La notion d'espace métrique général est due à Riemann. Les problèmes principaux qui s'y rattachent sont la détermination des lignes de longueur minimum joignant deux points, et la question de savoir à quelles conditions deux métriques peuvent se ramener l'une à l'autre par un changement de variables convenable. Ces problèmes ont conduit dès l'origine à l'emploi des importants symboles de Christoffel et de Riemann. Pour la commodité d'application des règles du calcul tensoriel, et en raison de l'habitude prise de placer à la partie supérieure les indices contrevariants, nous demandons la permission de les écrire de la façon suivante :

$$(19) \quad \left\{ \begin{matrix} s \\ ik \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{rs} \left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r} \right)$$

$$(20) \quad \left\{ \begin{matrix} s \\ ikr \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} s \\ rk \end{matrix} \right\}}{\partial x^i} - \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} s \\ ri \end{matrix} \right\}}{\partial x^k} + \left\{ \begin{matrix} q \\ rk \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} s \\ qi \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} q \\ ri \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} s \\ qk \end{matrix} \right\}.$$

Le symbole de Riemann-Christoffel $\left\{ \begin{matrix} s \\ ikr \end{matrix} \right\}$ est un véritable champ tensoriel et se transforme conformément à (10) ; il n'en est pas de même pour le symbole $\left\{ \begin{matrix} s \\ ik \end{matrix} \right\}$ dont les formules de transformation sont :

$$(21) \quad \left\{ \begin{matrix} p \\ mn \end{matrix} \right\}' = \left\{ \begin{matrix} s \\ ik \end{matrix} \right\} \frac{\partial x'^p}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x'^n} + \frac{\partial^2 x^s}{\partial x'^m \partial x'^n} \cdot \frac{\partial x'^p}{\partial x^s}.$$

On posera encore, par abaissement d'indice :

$$(22) \quad \left\{ ik, r \right\} = g_{rs} \left\{ \begin{matrix} s \\ ik \end{matrix} \right\}$$

$$(23) \quad \left\{ ikrp \right\} = g_{ps} \left\{ \begin{matrix} s \\ ikr \end{matrix} \right\}$$

§ 2. — ESPACE A CONNEXION AFFINE.

A la suite des travaux de M. Lévi-Civita sur le déplacement parallèle, M. Hermann Weyl a songé à fonder l'idée d'espace sur

la notion de parallélisme, supposée définie de proche en proche, par une expression de la forme :

$$(24) \quad d\zeta^i = -\Gamma_{pr}^i \cdot \zeta^p \cdot dx^r \quad (\Gamma_{pr}^i = \Gamma_{rp}^i)$$

dans laquelle ζ^i sont les composantes du vecteur déplacé parallèlement, et $d\zeta^i$ les accroissements de ces composantes lorsqu'on déplace le point d'application du vecteur le long du vecteur infinitésimal de composantes dx^r .

$$i, r, p, \dots = 1, 2, \dots, n.$$

Les formules (24) permettent d'effectuer la comparaison des vecteurs issus d'un point avec les vecteurs issus d'un point infiniment voisin, et de rapporter ces vecteurs les uns aux autres. Nous pouvons choisir dans l'espace affine tangent en M des vecteurs fondamentaux de coordonnées

$$e_1, e_2, \dots, e_n$$

dont les composantes contrevariantes soient respectivement données par le tableau suivant :

$$\begin{array}{c|cccccc} e_1 & 1, & 0, & 0, & \dots, & 0 & \\ e_2 & 0, & 1, & 0, & \dots, & 0 & \\ e_3 & 0, & 0, & 1, & \dots, & 0 & \\ \vdots & . & . & . & . & . & \\ e_n & 0, & 0, & 0, & \dots, & 1 & \end{array}$$

de sorte que tout vecteur X attaché au point M se décompose suivant $e_1, e_2, \dots, e_n$ conformément au symbole

$$(25) \quad X = \zeta^i \cdot e_i$$

dans lequel on fait la convention de sommation.

La comparaison des vecteurs fondamentaux e_i et $e_i + de_i$ aux deux points infiniment voisins se fera au moyen de la formule vectorielle ⁽¹⁾ suivante, qui résulte de (24)

$$(26) \quad de_i = \Gamma_{ir}^k \cdot e_k \cdot dx^r.$$

Il est important de reconnaître comment se transforment les Γ_{ir}^k par un changement de coordonnées (1). On a d'abord aisément :

$$(27) \quad e'_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \cdot e_i$$

(1) e_i représente un vecteur dont i est le numéro d'ordre, et non une composante d'un vecteur. C'est pourquoi (26) est une égalité vectorielle.

si alors on a dans le nouveau système :

$$(28) \quad de'_k = \Gamma_{kr}^{i's} \cdot e'_s \cdot dx'^r$$

en différentiant (27) et prenant les nouvelles coordonnées pour variables indépendantes, il vient :

$$(29) \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^k \partial x'^r} + \Gamma_{pq}^i \cdot \frac{\partial x^p}{\partial x'^k} \cdot \frac{\partial x^q}{\partial x'^r} = \Gamma_{kr}^{i's} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x'^s}$$

on en déduit les formules de transformation cherchées.

Torsion. — A côté de la formule (24) nous avons placé avec MM. Lévi-Civita et Weyl une formule restrictive entre parenthèses. Remarquons que le calcul précédent ne suppose nullement les composantes Γ_{pq}^i symétriques dans leurs deux indices covariants. Les formules (29) montrent que les composantes Γ_{pq}^i ne sont pas les composantes d'un véritable champ tensoriel ; mais si deux systèmes de composantes Γ_{pq}^i ont les mêmes formules de transformation (29), leur différence est un tenseur véritable ; par exemple, on forme le tenseur

$$(30) \quad \Lambda_{pq}^i = \Gamma_{pq}^i - \Gamma_{qp}^i$$

que M. Cartan appelle la torsion de l'espace à connexion affine, et qu'il ne suppose pas identiquement nul, ce qui généralise la théorie de M. Weyl. Ce tenseur jouera un rôle important dans notre théorie géométrique de l'éther, car ses composantes contractées représenteront le potentiel vecteur.

Lorsque la torsion est identiquement nulle, et dans ce cas seulement, on peut, par un changement de coordonnées convenable, annuler « en un point déterminé » toutes les composantes Γ_{pq}^i ; si par exemple le point considéré est celui qui a toutes ses coordonnées nulles (ce qu'on peut supposer), il suffira d'effectuer le changement de coordonnées

$$(31) \quad x^i = x'^i - \Gamma_{pq}^i \cdot x'^p \cdot x'^q$$

pour arriver au résultat cherché ; rien n'empêcherait d'ailleurs d'ajouter au second nombre des termes de degré supérieur à deux, de sorte qu'il existe une infinité de systèmes « géodésiques » réalisant l'évanouissement des composantes $\Gamma_{mn}^{i's}$. Si la torsion n'est pas nulle il sera seulement possible de réaliser l'évanouissement de la partie symétrique des $\Gamma_{mn}^{i's}$, réduisant ainsi ces composantes, au point considéré, à celles de la torsion.

La similitude des formules de transformation (21) et (29) suggère une analogie qui se précise lorsqu'on se pose le problème suivant : peut-on définir dans un espace métrique de Riemann un déplacement parallèle Γ_{pq}^i tel que les longueurs soient toujours conservées ?

On trouve immédiatement par application de (24)

$$(32) \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r} - g_{ip} \Gamma_{kr}^p - g_{pk} \Gamma_{ir}^p = 0.$$

En permutant successivement i et r , k et r dans cette formule, on obtient deux nouvelles équations, et, par des combinaisons linéaires bien connues, on obtient, en utilisant la notation (19),

$$(33) \quad \Gamma_{ik}^s = \left\{ \begin{matrix} s \\ ik \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2} g^{rs} (\Lambda_{ir, k} + \Lambda_{kr, i} + \Lambda_{ik, r})$$

où on a posé

$$\Lambda_{ir, k} = g_{ik} \cdot \Lambda_{ir}^l.$$

Le problème posé est donc indéterminé ; on peut se donner arbitrairement les $\frac{n^3(n-1)}{2}$ composantes de la torsion ; la connexion affine est alors déterminée par (33). Si l'on choisit une torsion nulle, les composantes Γ_{ik}^s se confondent avec les symboles de Christoffel (19).

Il y a lieu d'examiner le problème inverse : étant donné un espace à connexion affine quelconque, à quelles conditions est-il possible d'y définir une métrique g_{ik} telle que les longueurs des vecteurs soient conservées par le déplacement parallèle ?

Il s'agira de résoudre le système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre dans les g_{ik} :

$$(34) \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r} - g_{ip} \cdot \Gamma_{kr}^p - g_{pk} \cdot \Gamma_{ir}^p = 0.$$

En général, pour des Γ_{ik}^r quelconques, ce système est incompatible. Pour obtenir les conditions d'intégrabilité, on écrira que les dérivées partielles des g_{ik} formées à partir de (32) ne donnent jamais de valeurs différentes lorsqu'on intervertit l'ordre des dérivations. Par exemple on pourra calculer $\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^r \partial x^s}$ de deux ma-

nières par dérivation de (32); en écrivant que les résultats obtenus sont identiques, il vient :

$$(35) \quad g_{ip} R_{srk}^p + g_{pk} R_{sri}^p = 0$$

où l'on a posé :

$$(36) \quad R_{srk}^i = \frac{\partial \Gamma_{kr}^i}{\partial x_s} - \frac{\partial \Gamma_{ks}^i}{\partial x_r} + \Gamma_{kr}^q \Gamma_{qs}^i - \Gamma_{ks}^q \Gamma_{qr}^i.$$

Les équations (35) constituent les conditions d'intégrabilité des équations aux dérivées partielles (34). Si on peut trouver un système de solutions en g_{ik} des équations algébriques linéaires (35) et si un tel système vérifie (32), le problème sera résolu.

Des considérations géométriques sur le déplacement parallèle le long d'un contour fermé infinitésimal permettront de présenter le problème sous une forme plus concrète. Nous commencerons toutefois par rappeler quelques propositions indispensables qui se rapportent à la dérivation covariante.

§ 3. — DÉRIVATION COVARIANTE ET OPÉRATEURS LINÉAIRES PLUS GÉNÉRAUX.

Si φ est un scalaire $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ représentent les composantes d'un champ vectoriel covariant, comme on le voit immédiatement en écrivant

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} dx^i$$

et remarquant que $d\varphi$ est un invariant tandis que dx^i représente un champ vectoriel contrevariant.

Si on dérive les composantes η_i d'un vecteur covariant on n'obtient plus les composantes d'un tenseur. Dérivons en effet suivant x'^r l'expression

$$\eta'_i = \eta_{ik} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}$$

il vient

$$\frac{\partial \eta'_i}{\partial x'^r} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \cdot \frac{\partial \eta_{ik}}{\partial x^l} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial x'^r} + \eta_{ik} \cdot \frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^i \cdot \partial x'^r}$$

l'existence du second terme du second membre empêche $\frac{\partial \eta_{ik}}{\partial x^l}$ d'être un tenseur. Par contre en utilisant un système de composantes Γ_{pq}^i qui se transforment d'après les formules (29) il vient :

$$(37) \quad \left(\frac{\partial \eta_{ik}}{\partial x^r} - \Gamma_{ir}^s \eta_{sk} \right) = \left(\frac{\partial \eta_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{kl}^h \cdot \eta_{ih} \right) \frac{\partial x^k}{\partial x'^l} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial x'^r}$$

et nous avons formé un tenseur covariant du 2^e ordre qu'on appelle une dérivée covariante du premier. On posera

$$(38) \quad D_r \eta_{ik} = \frac{\partial \eta_{ik}}{\partial x^r} - \Gamma_{kl}^h \cdot \eta_{ih}.$$

Le raisonnement peut se répéter pour un tenseur absolument quelconque f_i^k avec des indices en haut et en bas. On trouvera

$$(39) \quad D_r f_i^k = \frac{\partial f_i^k}{\partial x^r} - \Gamma_{ir}^p \cdot f_p^k + \Gamma_{pr}^k \cdot f_i^p$$

sur cette formule la règle apparaît en toute généralité. En particulier pour une densité tensorielle (§ 1), il suffira de tenir compte des n indices covariants qui sont omis dans l'écriture, on aura :

$$(40) \quad D_r \mathcal{F}_i^k = \frac{\partial \mathcal{F}_i^k}{\partial x^r} - \mathcal{F}_p^k \cdot \Gamma_{ir}^p + \mathcal{F}_i^p \cdot \Gamma_{pr}^k - \mathcal{F}_i^p \cdot \Gamma_{pr}^p.$$

Si U et V sont deux tenseurs absolument quelconques et si on désigne par $\{U, V\}$ leur produit, on vérifie immédiatement que l'on a :

$$(41) \quad D\{U, V\} = \{U, DV\} + \{DU, V\}$$

et la formule se généralise pour un nombre quelconque de tenseurs.

Si un tenseur est déplacé parallèlement suivant un chemin quelconque, la dérivée covariante dans la direction du déplacement est constamment nulle.

Si un scalaire a une dérivée covariante identiquement nulle, il se réduit à une constante.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse introduire dans un espace à connexion affine une métrique de Riemann est qu'il existe un tenseur symétrique g_{ik} dont la dérivée covariante soit identiquement nulle.

En effet les équations (32) se réduisent à

$$(42) \quad D(g_{ik}) = 0.$$

Ces équations sont d'ailleurs équivalentes aux suivantes

$$(43) \quad D(g^{ik}) = 0$$

comme on le voit en prenant des dérivées covariantes des deux membres de (14) en utilisant la formule (41). On en déduit

$$(44) \quad Dg_{pl} = -g_{pl} \cdot g_{ik} \cdot Dg^{ik}$$

$$(45) \quad Dg^{pl} = -g^{pk} \cdot g^{li} \cdot Dg_{ki}$$

et par suite l'une des formules (42) ou (43) entraîne l'autre.

Si on remarque que le déterminant g est un tenseur covariant d'ordre $2n$ et que l'on forme sa dérivée covariante en dérivant successivement chacun des monomes de son développement on trouve en vertu de (41) et (42) la relation utile

$$(46) \quad Dg = 0.$$

Comme $\sqrt{g}$ est une densité scalaire et que d'après (41)

$$\sqrt{g} \cdot D\sqrt{g} = \frac{1}{2} D \cdot g$$

Il vient encore

$$(47) \quad D\sqrt{g} = 0.$$

Si on développe cette relation d'après (40) elle s'écrit simplement

$$(48) \quad \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^r} - \sqrt{g} \Gamma_{pr}^p = 0.$$

Nous aurons encore à utiliser dans la suite la densité tensorielle fondamentale définie par

$$(49) \quad \mathcal{G}^{ik} = \sqrt{g} \cdot g^{ik}.$$

Par dérivation covariante de cette formule, en vertu de (41), (43), (47), on trouve

$$(50) \quad D\mathcal{G}^{ik} = 0$$

qui est entièrement équivalente à (42). En l'explicitant on a :

$$(51) \quad \frac{\partial \mathcal{G}^{ik}}{\partial x^r} + \mathcal{G}^{lp} \cdot \Gamma_{pr}^k + \mathcal{G}^{pk} \cdot \Gamma_{pr}^i - \mathcal{G}^{ik} \cdot \Gamma_{pr}^p = 0.$$

Il sera important pour la suite de connaître le déplacement parallèle d'un vecteur ou d'un tenseur le long d'un contour fermé. Commençons par définir un contour fermé infiniment petit passant par un point O; définissons arbitrairement deux champs vectoriels infinitésimaux arbitraires par deux systèmes de différentielles dx et δx . On aura au point O deux vecteurs OA et OB. Si O a pour coordonnées x^i , A a pour coordonnées $x^i + dx^i$, et B : $x^i + \delta x^i$. En A le champ vectoriel δ définit un vecteur AM; en B le champ d définit un vecteur BM'; les coordonnées de M sont

$$x^i + dx^i + \delta x^i + d\delta x^i$$

celles de M' sont

$$x^i + \delta x^i + dx^i + \delta dx^i$$

M' et M sont confondus en vertu de $d\delta x^i = \delta dx^i$ et nous avons un contour fermé. Déplaçons parallèlement un vecteur ξ^i le long de ce contour fermé. Un calcul bien connu donne pour la variation cherchée

$$(52) \quad \Delta \xi^i = - \xi^p \cdot R_{srp}^i \cdot dx^s \cdot \delta x^r.$$

R_{srp}^i étant donné par (36) et la circulation ayant lieu en commençant par le vecteur d . On calculerait de même la variation d'un tenseur arbitraire tel que f_i^k que l'on déplace parallèlement le long du contour fermé OAMBO :

$$(53) \quad \Delta f_i^k = (-f_i^p R_{srp}^k + f_p^k R_{sri}^p) dx^s \cdot \delta x^r.$$

Sur l'équation (52) le caractère tensoriel de R_{srp}^i apparaît aisément.

L'équation (52) s'interprète géométriquement ainsi : Les vecteurs infinitésimaux d et δ issus de O définissent une *facette* placée en O, avec un sens de circulation autour de son périmètre. Si l'on transporte parallèlement le long du contour de la facette l'ensemble des vecteurs issus de O, on obtient au retour un ensemble de vecteurs qui se déduit du premier par une transformation vectorielle linéaire, infiniment voisine de la transformation vectorielle unité. Posons en effet

$$(54) \quad u_p^i = - R_{srp}^i dx^s \delta x^r$$

$$(55) \quad \varepsilon_p^i = 0 \quad \text{si } p \neq i; \quad = 1 \quad \text{si } p = i$$

la transformation vectorielle est donnée par

$$(56) \quad \xi'^i = \xi^p (\varepsilon_p^i + u_p^i)$$

ξ'^i étant les coordonnées du vecteur ξ^i transformé.

Il existe en général n vecteurs qui conservent leur direction par la transformation; on les obtient en résolvant les équations homogènes :

$$\xi^p \cdot u_p^i = \mu \cdot \xi^i$$

μ étant une *racine* de l'équation caractéristique de degré n obtenue en annulant le déterminant des éléments

$$|u_p^i - \mu \varepsilon_p^i|$$

Nous n'insistons pas sur une théorie bien connue des transformations linéaires de vecteurs, et nous nous arrêtons un instant sur la question de savoir s'il existe des quadriques de centre O qui par la substitution (56) se transforment en quadriques égales. Si une telle quadrique existait en tous les points O , et possédait la propriété envisagée pour toutes les facettes passant par O , l'espace pourrait être affecté d'une métrique de Riemann.

On doit avoir pour une telle quadrique :

$$g_{pq} \xi'^p \xi'^q = g_{ik} \xi^i \xi^k;$$

remplaçons les ξ'^p par leurs expressions (56); on obtient en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur

$$g_{ip} u_k^p + g_{kp} u_i^p = 0;$$

cette équation est identique à (35). Pour tâcher de la résoudre prenons pour un instant pour vecteurs fondamentaux de coordonnées ceux dont la direction se conserve par la transformation (56). Le déterminant des u_k^p se réduit alors à une diagonale principale. Soit I le 1^{er} élément de cette diagonale. Il reste alors simplement pour l'équation précédente

$$g_{ik}(I + K) = 0.$$

On ne pourra trouver de quadrique non dégénérée répondant à la question, que si les racines caractéristiques sont deux à deux égales et opposées. Si donc l'équation caractéristique est de degré pair, elle ne doit avoir que des termes de degré pair en μ ; si elle est de degré impair, elle n'a que des termes de degré impair en μ .

Si ces conditions sont réalisées, il y a toute une famille de quadriques qui sont inchangées par la transformation vectorielle linéaire. Les termes rectangles qui, dans l'équation réduite, correspondent à des racines caractéristiques opposées, peuvent être affectés d'un coefficient arbitraire.

Remarquons que pour n impair il existe un vecteur inchangé par la transformation; c'est l'axe de rotation.

A côté de l'interprétation du tenseur R_{srp}^i comme transformation vectorielle attachée à une facette, signalons l'interprétation du tenseur plus simple $\Gamma_{ik}^r - \Gamma_{ki}^r = \Lambda_{ik}^r$.

Considérons encore deux vecteurs infinitésimaux issus de O, de composantes dx^i et δx^i . Déplaçons OA parallèlement le long de OB, il vient en BA'. Déplaçons OB parallèlement le long de OA, il vient en AB'. Si O est origine de coordonnées, les coordonnées de A' sont :

$$\delta x^i + dx^i + dx^p \cdot \Gamma_{pr}^i \cdot \delta x^r$$

Celles de B' sont :

$$dx^i + \delta x^i + \delta x^r \cdot \Gamma_{rp}^i \cdot dx^p.$$

Le vecteur B'A' est donc infiniment petit du 2^e ordre et a pour composantes

$$(57) \quad f^i = \Lambda_{pr}^i \cdot dx^p \cdot \delta x^r$$

on peut l'appeler le vecteur de fermeture de la ligne brisée définie ci-dessus.

Notons pour un tenseur arbitraire h_i^k la formule suivante

$$(58) \quad (DD - DD - \Lambda_{sr}^q D) h_i^k = h_i^p \cdot R_{srp}^k - h_p^k \cdot R_{sri}^p$$

qu'il y a lieu de rapprocher de (53) et (57). On la déduit de (39) et (36).

L'opérateur différentiel du second ordre

$$(59) \quad D = DD - DD - \Lambda_{sr}^q D$$

satisfait tout comme l'opérateur D à la relation (41). On a :

$$(60) \quad D_{sr}^{\xi i} = R_{srp}^i \xi^p$$

$$(61) \quad D f_i^k = R_{srp}^k \cdot f_i^p - R_{sri}^p \cdot f_p^k.$$

Signalons deux identités remarquables qu'on peut déduire de

(39) et (61), dont la seconde connue sous le nom d'identité de Bianchi a joué un rôle important dans les théories physico-géométriques. Ce sont :

$$(62) \quad D_t \Delta_{sr}^q + D_s \Delta_{rt}^q + D_r \Delta_{ts}^q = R_{rst}^q + R_{str}^q + R_{trs}^q - \Lambda_{pr}^q \Lambda_{st}^p - \Lambda_{ps}^q \Lambda_{tr}^p - \Lambda_{pt}^q \Lambda_{rs}^p$$

$$(63) \quad DR_{srk}^i + DR_{rtk}^i + DR_{tsk}^i = R_{rpk} \cdot \Lambda_{st}^p + R_{spk} \Lambda_{tr}^p + R_{tpk} \Lambda_{rs}^p$$

la première se vérifie directement en utilisant (30), (34), (39). Pour démontrer la deuxième on peut opérer de la manière suivante. L'équation (59) nous donne l'identité suivante :

$$(64) \quad DD + \dots = DD + \dots + \Lambda_{ts}^q \cdot D_{qr} + \dots + [\Lambda_{ts}^q \Lambda_{qr}^p - D_r(\Lambda_{ts}^p)] D_p + \dots$$

les termes non écrits s'obtenant par permutations circulaires de t, s, r .

Si nous démontrons (63) en un point donné dans un système particulier de coordonnées, elle sera vraie dans tous les cas, à cause de sa forme tensorielle. Choisissons un système de coordonnées qui soit quasi-géodésique au point M, c'est-à-dire tel qu'en ce point les Γ_{hk}^i se réduisent à leur partie symétrique gauche $\frac{1}{2} \Lambda_{hk}^i$.

Choisissons ensuite un champ vectoriel ξ^q qui dans ce système de coordonnées a ses composantes constantes dans tout l'espace ; de sorte qu'on a dans tout l'espace, d'après (39)

$$D_r \xi^i = \xi^q \Gamma_{qr}^i$$

on a ensuite d'après (61)

$$DD_{tsr}^i = \xi^q \cdot \Gamma_{qr}^a \cdot R_{tsu}^i - \xi^q \Gamma_{qu}^i \cdot R_{tsr}^a$$

Appliquons au vecteur ξ^i les opérateurs des deux membres de (64), on obtient en tenant compte de (62) l'identité (63) cherchée.

En substituant dans (61) au tenseur quelconque f_i^k les tenseurs Λ_{pq}^k et R_{pqi}^k on obtiendrait de nouvelles identités qui ne semblent pas devoir présenter d'intérêt particulier.

Dans le cas où l'espace est un espace de Riemann sans torsion la formule de Bianchi (63) s'écrit simplement, en élevant l'indice k et utilisant (43)

$$DR_{sr}^{ik} + DR_{rt}^{ik} + DR_{ts}^{ik} = 0$$

si alors on contracte dans les indices s et i d'une part, r et k de l'autre, on obtient la formule d'Einstein :

$$D_i \left[R^i_t - \frac{1}{2} \varepsilon^i_t R \right] = 0$$

dans laquelle :

$$R^i_t = R^{ri}_{rt} \quad R = R^{ri}_{ri}$$

Si on appelle densité d'énergie totale la densité tensorielle

$$\mathcal{E}^i_t = \left[R^i_t - \frac{1}{2} \varepsilon^i_t R \right] \cdot \sqrt{g}$$

on peut encore écrire à cause de (47) et (41), et d'après (33) et (40)

$$\frac{\partial \mathcal{E}^i_t}{\partial x^i} - \mathcal{E}^i_q \left\{ \frac{q}{t} \right\} = 0$$

c'est d'après Einstein l'équation de conservation de l'énergie.

Les tenseurs obtenus par contraction à partir du tenseur R^q_{srp} jouent un rôle important dans certaines théories physiques. En contractant l'indice supérieur avec le premier indice inférieur on obtient

$$R_{rp} = R^s_{srp}$$

ce tenseur n'est pas en général symétrique dans les indices r et p , calculons en effet la différence $R_{rp} - R_{pr}$. On trouve

$$(65) \quad R_{rp} - R_{pr} + D^s_{rp} \Lambda^s_{rs} = \frac{\partial \Gamma^s_{rs}}{\partial x^p} - \frac{\partial \Gamma^s_{ps}}{\partial x^r}$$

dans la théorie électromagnétique que nous voulons développer, c'est ce tenseur symétrique gauche qui sera représentatif du champ électromagnétique. On peut vérifier qu'il peut s'exprimer encore à l'aide du tenseur contracté suivant le dernier indice covariant

$$R^s_{rps} + \frac{\partial \Lambda^s_{rs}}{\partial x^p} - \frac{\partial \Lambda^s_{ps}}{\partial x^r} = - \frac{\partial \Gamma^s_{rs}}{\partial x^p} + \frac{\partial \Gamma^s_{ps}}{\partial x^r}$$

dans un espace de Riemann R^s_{rps} est identiquement nul en vertu de (48).

§ 4. — ROTATION. THÉORÈME DE STOKES-POINCARÉ.

Considérons des tenseurs linéaires (§ 1) covariants d'ordre 0, 1, 2, ... que nous désignons suivant leur ordre par

$$A, A_i, A_{ik}, A_{ikl}, \dots$$

Considérons en même temps les éléments différentiels linéaires d'ordre 1, 2, 3, ...

$$dx^i, \quad d\sigma^{ik} = dx^i \cdot \delta x^k - dx^k \cdot \delta x^i, \quad d\sigma^{ikl} = \begin{vmatrix} dx^i dx^k dx^l \\ \delta x^i \delta x^k \delta x^l \\ \partial x^i \partial x^k \partial x^l \end{vmatrix}, \quad \dots$$

L'opération différentielle « rotation » effectuée sur un tenseur covariant linéaire permet d'obtenir un tenseur linéaire d'ordre plus élevé d'une unité. On pose :

$$\begin{aligned} (66) \quad \text{Rot}_i A &= \frac{\partial A}{\partial x^i}, \\ \text{Rot}_i A_k &= \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = DA_k - DA_i - A_p \Lambda_{ik}^p, \\ \text{Rot}_i A_{kl} &= \frac{\partial A_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial A_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l} \\ &= DA_{kl} + DA_{li} + DA_{ik} - A_{pi} \Lambda_{kl}^p - A_{pk} \Lambda_{li}^p - A_{pl} \Lambda_{ik}^p, \\ \text{Rot}_i A_{klh} &= \frac{\partial A_{klh}}{\partial x^i} - \frac{\partial A_{lhi}}{\partial x^k} + \frac{\partial A_{hik}}{\partial x^l} - \frac{\partial A_{ihl}}{\partial x^h}, \quad \dots \end{aligned}$$

Les théorèmes de Stokes-Poincaré permettent de transformer une intégrale étendue à la frontière d'une multiplicité d'ordre p , en une intégrale étendue à la multiplicité elle-même.

On a successivement les formules suivantes

$$\begin{aligned} (67) \quad A &= \int_i \text{Rot } A \cdot dx^i, \\ \int_L A_i dx^i &= \frac{1}{2} \int_s \text{Rot } A_k \cdot d\sigma^{ik}, \\ \frac{1}{2} \int_s A_{ik} \cdot d\sigma^{ik} &= \frac{1}{2 \cdot 3} \int_v \text{Rot } A_{kl} \cdot d\sigma^{ikl}, \quad \dots \end{aligned}$$

Le deuxième est la formule de Stokes transformant une intégrale le long d'une ligne fermée en intégrale de surface ; la 3^e est la formule de Gauss ; les suivantes ont été données par Poincaré et n'existent que pour $n > 3$.

On peut donner au théorème une autre forme en employant la notation des densités tensorielles. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ une permutation paire de $1, 2, 3, \dots, n$.

De la définition des densités tensorielles et des règles de saturation d'indices contenues dans la formule (5) il résulte que l'on peut écrire

$$\mathcal{H}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} = A_{\alpha_p + 1, \alpha_p + 2, \dots, \alpha_n}$$

de sorte qu'un tenseur linéaire covariant d'ordre $(n - p)$ inférieur à n peut tout aussi bien se représenter par une densité tensorielle linéaire contrevariante d'ordre p .

On pose encore, pour définir la divergence d'une densité linéaire,

$$\text{Div}_\alpha \mathcal{H}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1}, \alpha} = \frac{\partial \mathcal{H}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1}, \alpha}}{\partial x^\alpha}$$

et les théorèmes précédents pourront s'écrire :

$$(68) \int_V \text{Div}_\alpha \mathcal{H}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1}, \alpha} d\sigma^{\alpha_p, \alpha_p + 1, \dots, \alpha_n} = \int_S \mathcal{H}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} d\sigma^{\alpha_p + 1, \dots, \alpha_n}.$$

Si l'on intègre dans un domaine, la divergence d'une densité linéaire qui s'annule à la frontière du domaine, cette intégrale est nulle. Ce théorème trouve fréquemment son application en physique.

Nous rappelons les théorèmes suivants qui sont dus à Poincaré :

La rotation d'une rotation est identiquement nulle.

La divergence d'une divergence est identiquement nulle.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une intégrale étendue à une multiplicité d'ordre p ne dépende que des valeurs prises par l'élément d'intégration $A_{ik\dots l}$ à la frontière de cette multiplicité est

$$(69) \quad \text{Rot}_h A_{ik\dots l} = 0.$$

Si l'élément d'intégration est écrit sous la forme d'une densité tensorielle, l'équation précédente s'écrira tout aussi bien

$$(70) \quad \text{Div } \mathcal{H} = 0$$

les théorèmes de divergence ne sont que les théorèmes de rotation écrits sous une autre forme,

Aux formules de rotation (66) se rattachent des opérateurs différentiels linéaires tels que :

$$(71) \quad \begin{aligned} D_{ik} &= D_{ik} - D_{ik} - \Lambda_{ik}^p \cdot D_p \\ D_{ikl} &= D_{ikl} + D_{ikl} + D_{ikl} - \Lambda_{kl}^p D_{pi} - \Lambda_{li}^p D_{pk} - \Lambda_{ip}^p D_{lk} \dots \end{aligned}$$

qui généralisent le premier d'entre eux, déjà utilisé dans les relations (59), (60), (61), et que nous avons découvert par une voie plus artificielle.

§ 5. — L'ESPACE MÉTRIQUE DE H. WEYL.

Reprenons les considérations géométriques du § 3. Un espace de Riemann est caractérisé par l'existence d'un champ de quadriques tel qu'une quadrique du champ placée en M se déduise de la quadrique du champ placée en N par le déplacement parallèle de celle-ci suivant un chemin quelconque, joignant les deux points M et N. On reconnaît ce fait à ce qu'on peut résoudre les équations aux dérivées partielles (32) qui s'écrivent plus simplement d'après (42)

$$D(g_{ik}) = 0.$$

Nous avons vu qu'en général il était impossible de définir un tel champ de quadriques, dans un espace à connexion affine quelconque.

Un cas un peu moins particulier a été envisagé pour la première fois par H. Weyl. C'est celui où l'on peut trouver un champ de quadriques satisfaisant à la propriété suivante : la quadrique du champ placée en M et transportée parallèlement jusqu'en N le long d'un chemin quelconque, donne toujours une quadrique homothétique à la quadrique du champ placée en N.

Soit g_{ik} le champ de quadriques considéré ; la dérivée covariante de g_{ik} ne sera plus nécessairement nulle, mais seulement proportionnelle à g_{ik} . On aura au lieu de (42)

$$(72) \quad D_r g_{ik} = -g_{ik} \cdot \varphi_r$$

φ_r sera un vecteur covariant déterminé en tout point de l'espace. Il en résultera d'après (45) l'équation équivalente

$$(73) \quad D_r g^{ik} = g^{ik} \varphi_r$$

Les quadriques g_{ik} du champ ne sont déterminées qu'à une homothétie près en chaque point. Considérons alors avec H. Weyl un changement d'étalonnage

$$(74) \quad g'_{ik} = \lambda g_{ik}$$

où λ est un scalaire arbitraire. φ_r devra être remplacé par un autre vecteur φ'_r satisfaisant à :

$$D_r g'_{ik} = -g'_{ik} \cdot \varphi'_r$$

d'où l'on tire aisément en tenant compte de (72)

$$(75) \quad \varphi'_r = \varphi_r - \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial x^r}$$

Les équations (33) sont remplacées par les suivantes :

$$(76) \quad \Gamma^s_{ik} = \left\{ \begin{matrix} s \\ ik \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2} g^{rs} (\Lambda_{irk} + \Lambda_{kri} + \Lambda_{ikr}) + \frac{1}{2} (\epsilon^s_i \cdot \varphi_k + \epsilon^s_k \cdot \varphi_i - g_{ik} \varphi^s)$$

Notion de poids. — A côté des tenseurs dont la définition est indépendante de l'étalonnage, on peut envisager les tenseurs obtenus par extension en élevant ou abaissant certains indices à l'aide de g^{ik} , g_{ik} . Si on convient de dire que le tenseur g_{ik} est de poids 1, on dira qu'une grandeur est un tenseur de poids n si ses composantes se trouvent multipliées par λ^n par le changement d'étalonnage (74). Telles sont par exemple les grandeurs obtenues à partir d'un tenseur par abaissement de n indices à l'aide de g_{ik} .

On dira donc que g^{ik} a le poids (-1) , $\sqrt{g}$ a le poids $\frac{n}{2}$.

Il est commode dans certains calculs de définir la dérivation covariante d'un tenseur U de poids donné n par l'expression suivante

$$(77) \quad D_r U = D_r U + n \cdot U \cdot \varphi_r$$

U peut contenir des indices supérieurs et inférieurs, n peut être positif ou négatif et même dans certains cas fractionnaire (exemple le poids de $\sqrt{g}$ pour n impair).

Avec cette convention les équations (72) et (73) s'écrivent plus simplement

$$(78) \quad D_r g_{in} = 0, \quad (78') \quad D'_r g^{ik} = 0.$$

On en déduirait comme pour (47) et (51)

$$(79) \quad D' \sqrt{g} = 0, \quad (80) \quad D' \mathcal{C}^{ik} = 0,$$

où $\sqrt{g}$ a le poids $\frac{n}{2}$ et G^{ik} le poids $\left(\frac{n}{2} - 1\right)$; explicitons d'après (77)

$$(79') \quad \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^r} - \sqrt{g} \Gamma_{pr}^p + \frac{n}{2} \sqrt{g} \varphi_r = 0,$$

$$(80') \quad \frac{\partial \mathcal{C}^{ik}}{\partial x^r} + \mathcal{C}^{ip} \Gamma_{pr}^k + \mathcal{C}^{pk} \Gamma_{pr}^i - \mathcal{C}^{ik} \Gamma_{pr}^p + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \mathcal{C}^{ik} \varphi_r = 0.$$

L'équation (41) est valable pour l'opération D' comme pour D . Posons encore

$$(81) \quad D'_{sr} = D'_s D'_r - D'_r D'_s - \Lambda_{sr}^q D'_q$$

qui correspond à la formule (59); on vérifie en utilisant (66):

$$(82) \quad D'_{sr}(U) = D U + n \cdot U \cdot \text{Rot}_s \varphi_r$$

où U est un tenseur quelconque de poids n . Appliquons en particulier cette formule au tenseur g_{ik} lui-même, il vient d'après (61), (78)

$$0 = -g_{pk} R_{sr}^p - g_{ip} R_{srk}^p + g_{ik} \text{Rot}_s \varphi_r$$

ou plus simplement

$$(83) \quad R_{srk} + R_{srki} = g_{ik} \cdot \text{Rot}_s \varphi_r.$$

§ 6. — TRANSFORMATIONS ISOMÉTRIQUE, PROJECTIVE, CONFORME.

a) On voit immédiatement par les formules (33) et (76) qu'il existe une infinité de connexions affines correspondant à une même métrique. Nous appellerons transformation isométrique un changement de connexion affine sans changement de métrique. Soit $\Psi_{ir,k}^s$ un tenseur covariant quelconque symétrique gauche dans les deux premiers indices; il définit une déformation isométrique

$$(84) \quad \delta \Gamma_{ik}^s = g^{rs} (\psi_{ir,k} + \psi_{kr,i} + \psi_{ik,r})$$

où $\delta \Gamma_{ik}^s$ est la variation subie par les composantes Γ_{ik}^s .

b) On appelle déformation projective celle qui conserve les lignes droites de l'espace à connexion affine donné. La ligne droite est caractérisée par le fait que sa tangente reste parallèle à elle-même lorsqu'on se déplace sur la ligne elle-même. Par chaque point, il passe une ligne droite ayant une direction déterminée en ce point, et une seule. On l'obtiendra en résolvant l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{pr}^i \cdot \frac{dx^p}{dt} \cdot \frac{dx^r}{dt} = \lambda \cdot \frac{dx^i}{dt}$$

où λ est une fonction arbitraire qu'on peut faire disparaître par un changement du paramètre t . On voit immédiatement que les lignes droites ne sont pas changées si on change la torsion de l'espace, sans changer les composantes symétriques de Γ_{pr}^i . Mais il existe une autre déformation projective importante portant sur les composantes symétriques Γ_{pr}^i de la connexion affine

$$\left[\Gamma_{pr}^{*i} = \frac{1}{2} (\Gamma_{pr}^i + \Gamma_{rp}^i) \right].$$

Elle est telle que l'on ait pour tout vecteur ξ^i :

$$\delta \Gamma_{pr}^{*i} \cdot \xi^p \xi^r = \lambda \cdot \xi^i$$

λ étant un scalaire convenable, ce qu'on peut écrire successivement

$$\begin{aligned} (\delta \Gamma_{pr}^{*i} \cdot \xi^k - \delta \Gamma_{pr}^{*k} \cdot \xi^i) \xi^p \xi^r &= 0 \\ (\epsilon_q^k \cdot \delta \Gamma_{pr}^{*i} - \epsilon_q^i \cdot \delta \Gamma_{pr}^{*k}) \xi^p \xi^r \xi^q &= 0 \end{aligned}$$

cette forme cubique est identiquement nulle si l'on a :

$$\delta \Gamma_{pr}^{*i} = \epsilon_p^i \cdot \varphi_r + \epsilon_r^i \cdot \varphi_p$$

où φ_r est un vecteur covariant arbitraire. La déformation projective générale est donc donnée par

$$(85) \quad \delta \Gamma_{ik}^s = \epsilon_i^s \cdot \varphi_k + \epsilon_k^s \cdot \varphi_i + \psi_{ih}^s \quad (\psi_{ik}^s = -\psi_{ki}^s).$$

La déformation projective est définie indépendamment de toute métrique.

c) La déformation conforme est celle qui conserve le tenseur métrique g_{ik} à un scalaire près. Deux espaces de Weyl sont conformes si on peut leur attribuer le même g_{ik} . Si donc on fait

abstraction d'une déformation isométrique arbitraire, la déformation conforme est donnée, d'après (76) par

$$(86) \quad \delta\Gamma_{ik}^s = \varepsilon_i^s \cdot \varphi_k + \varepsilon_k^s \cdot \varphi_i - g_{ik} \cdot \varphi^s$$

où φ_k est un tenseur covariant arbitraire.

d) Nous aurons l'occasion d'utiliser plus tard la déformation qui est à la fois conforme et projective. Elle aura d'une part la forme :

$$\delta\Gamma_{ik}^s = \varepsilon_i^s \varphi_k + \varepsilon_k^s \varphi_i - g_{ik} \varphi^s + g^{rs} (\psi_{ir,k} + \psi_{kr,i} + \psi_{ik,r})$$

et d'autre part la forme

$$\delta\Gamma_{ik}^s = \varepsilon_i^s \theta_k + \varepsilon_k^s \theta_i + \psi_{ik}^s$$

en identifiant ces deux formes il vient

$$\psi_{ir,k} + \psi_{kr,i} = g_{ik} \varphi_r + g_{ir} (\theta_k - \varphi_k) + g_{kr} (\theta_i - \varphi_i)$$

en permutant circulairement ir,k et ajoutant les résultats obtenus on trouve d'abord

$$\varphi_i = 2\theta_i$$

et en portant dans l'équation précédente

$$\psi_{ir,k} + \psi_{kr,i} = (g_{ik} \theta_r - g_{rk} \theta_i) + (g_{ki} \cdot \theta_r - g_{ri} \cdot \theta_k).$$

Soit π_{irk} un tenseur covariant du troisième ordre vérifiant les conditions de symétrie gauche dans deux indices quelconques :

$$\pi_{irk} = -\pi_{rik} = -\pi_{ikr}$$

le nombre de ses composantes distinctes est

$$= \frac{1}{6} n(n-1)(n-2)$$

on a alors :

$$\psi_{ir,k} = g_{ik} \theta_r - g_{rk} \theta_i + \pi_{irk}$$

et la déformation cherchée est donnée par

$$(87) \quad \delta\Gamma_{ik}^s = \varepsilon_i^s \varphi_k + g^{rs} \pi_{ikr}.$$

§ 7. — LES MÉTRIQUES GÉNÉRALISÉES. ESPACE AXONOMÉTRIQUE.

Les seules métriques utilisées jusqu'ici sont la métrique de Riemann et celle de Weyl ; ce sont elles qui jouent un rôle im-

portant dans les théories physico-géométriques. Mais on peut admettre, avec Eddington, que l'on a encore défini une métrique généralisée si on se donne un champ de quadriques g_{ik} et le déplacement parallèle infinitésimal des quadriques de ce champ. Posons

$$(88) \quad Dg_{ik} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r} - g_{ip}\Gamma_{kr}^p - g_{pk}\Gamma_{ir}^p = -S_{r,ik}$$

les composantes $S_{r,ik}$ constituent un tenseur en vertu de leur définition par la dérivée covariante. Remarquons immédiatement que la métrique ne suffit pas à définir la connexion affine, à moins que l'espace ne soit sans torsion. On tire en effet de (88) par les combinaisons linéaires qui nous ont déjà servi pour établir les équations (33)

$$(89) \quad \Gamma_{ik}^s = \left\{ \begin{smallmatrix} s \\ ik \end{smallmatrix} \right\} + \frac{1}{2} g^{rs} (\Lambda_{ir,k} + \Lambda_{kr,i} + \Lambda_{ik,r}) \\ + \frac{1}{2} g^{rs} (S_{k,ir} + S_{i,kr} - S_{r,ik})$$

cette formule nous donne toutes les connexions affines compatibles avec la métrique définie plus haut. Il y en a toujours une et une seule qui n'a pas de torsion.

Étant donné un espace à connexion affine et un champ de quadriques g_{ik} , l'équation (88) définit la métrique relative à ce champ de quadriques.

Nous dirons que deux espaces sont isométriques relativement à un champ de quadriques si leur métrique est la même. On voit alors qu'il existe toujours un espace sans torsion isométrique d'un espace quelconque relativement à un champ de quadriques donné ; mais cette isométrie ne subsisterait plus si on changeait le champ g_{ik} .

Nous appellerons déformation isométrique suivant le champ g_{ik} un changement de connexion affine qui conserve la métrique. Si on appelle γ_{ik}^r la variation de Γ_{ik}^r , elle est caractérisée par

$$\gamma_{ik}^r = g^{rs} (\psi_{is,k} + \psi_{ks,i} + \psi_{ik,s})$$

$\Psi_{is,k} = -\Psi_{si,k}$ est un tenseur covariant du 3^e ordre, symétrique gauche dans ses deux premiers indices.

La généralisation de la notion de tenseurs de poids donné se trouve dans la notion de tenseurs dont quelque indice se trouve attaché à un champ donné de quadriques.

A côté de la dérivation covariante définie par l'équation (39), il est parfois commode de considérer une dérivation covariante de tenseurs dont un ou plusieurs indices sont attachés à un champ de quadriques g_{ik} . Par exemple si les tenseurs f_p et h_p sont définis indépendamment de toute métrique de base, les tenseurs

$$f^\alpha = g^{\alpha p} \cdot f_p, \quad h_\alpha = g_{\alpha p} \cdot h^p$$

sont attachés par leur indice α au champ de quadriques g_{ik} , si nous représentons par des lettres grecques les indices attachés, on posera au lieu de (39)

$$(91) \quad D_r f^\alpha + f^\beta_s \cdot S_{r,\alpha}^\beta - f^\beta_\alpha \cdot S_{r,\beta}^\alpha = \Delta f^\alpha_\alpha$$

on devra considérer $g_{\alpha k}$ comme ayant l'un de ses indices attachés et on aura simplement pour l'équation (88) l'équation analogue à (42)

$$\Delta g_{\alpha k} = 0$$

on en déduira les équations équivalentes, comme au § 3

$$\Delta g^{\alpha k} = 0, \quad \Delta \mathcal{G}^{\alpha k} = 0$$

et aussi

$$\Delta_r g = D_r g + g S_{r,p}^p = 0,$$

dans ces formules on doit considérer le déterminant g comme ayant n indices covariants attachés :

$$\Delta_r \sqrt{g} = D_r \sqrt{g} + \frac{1}{2} \sqrt{g} S_{r,p}^p = 0,$$

$$\Delta_r \mathcal{G}^{\alpha i} = D_r \mathcal{G}^{\alpha i} - \mathcal{G}^{\beta i}_r \cdot S_{r,\alpha}^\beta + \frac{1}{2} \mathcal{G}^{\alpha i} S_{r,p}^p = 0.$$

La relation (41) est valable pour le symbole Δ comme pour D .

Explicitons les principales formules qui précèdent :

$$(92) \quad \frac{\partial g^{\alpha k}}{\partial x^r} + g^{\alpha p} \Gamma_{pr}^k + g^{pk} \Gamma_{pr}^\alpha = S_r^{\alpha k}.$$

$$(93) \quad \frac{\partial \mathcal{G}^{\alpha i}}{\partial x^r} + \mathcal{G}^{\alpha p} \Gamma_{pr}^i + \mathcal{G}^{pi} \Gamma_{pr}^\alpha - \mathcal{G}^{\alpha i} \Gamma_{rp}^p = S_r^{\alpha i} \cdot \sqrt{g} - \frac{1}{2} \cdot \mathcal{G}^{\alpha i} \cdot S_{r,p}^p.$$

$$(94) \quad \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^r} + \frac{1}{2} \sqrt{g} S_{r,p}^p - \sqrt{g} \cdot \Gamma_{r,p}^p = 0.$$

L'interprétation géométrique du tenseur $S_{r,ik}$ est immédiate. Nous avons un champ de quadriques g_{ik} , considérons la quadrique

attachée au point P et les quadriques attachées aux différents points P' infiniment voisins.

Soient dx^r les composantes contrevariantes du vecteur PP'. Déplaçons parallèlement de P' en P la quadrique de P', elle devient la quadrique

$$g_{ik} + S_{r,ik} \cdot dx^r.$$

Si on peut choisir le champ g_{ik} de manière que ces quadriques coïncident quels que soient P et P', l'espace est un espace de Riemann car on a identiquement

$$S_{r,ik} = 0.$$

Si ces quadriques sont toujours homothétiques, l'espace est un espace de Weyl car on a identiquement

$$S_{r,ik} = g_{ik} \cdot \varphi_r.$$

Nous voulons définir un espace métrique plus général caractérisé par la condition suivante : on peut choisir un champ de quadriques de manière que la quadrique de P et les quadriques déplacées d'origine P' soient coaxiales, c'est-à-dire possèdent un n -èdre autopolaire commun de directions issues de P. Nous dirons alors que l'espace est axonométrique. Une déformation isométrique conserve le caractère axonométrique de l'espace, ainsi que les axes.

Si nous prenons un système de coordonnées tel que les directions coordonnées en P soient celles des axes, on aura au point particulier considéré

$$(95) \quad g_{ik} = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq k.$$

$$(96) \quad S_{r,ik} = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq k.$$

Il peut arriver que les directions des axes présentent une indétermination, comme les directions d'axes des quadriques de révolution. On a alors affaire à des espaces axonométriques plus particuliers qui se rapprochent de l'espace de Weyl. Ce dernier correspond à une indétermination complète des directions des axes.

§ 8. — DÉFORMATION AXIALE ET DÉFORMATION AXONOMÉTRIQUE.

I. La déformation projective sera généralisée par la déformation axiale. Reprenons les équations des géodésiques du § 6

$$(97) \quad \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{pr}^i \frac{dx^p}{dt} \cdot \frac{dx^r}{dt} = \lambda \frac{dx^i}{dt}$$

une déformation projective de la forme (85) n'altère en rien les géodésiques.

Une déformation non projective définie par une variation γ_{pr}^i des composantes de la connexion affine, transforme au contraire la géodésique qui passe en un point P avec une direction ξ^i en ce point, dans une autre courbe tangente en P à la première. S'il arrive que ces deux courbes tangentes soient osculatrices en P nous dirons que ξ^i est une direction d'osculation en ce point. Cherchons les conditions pour qu'il en soit ainsi.

Si (97) sont les équations de la géodésique primitive, on peut choisir le paramètre t pour que la fonction λ du second membre disparaisse.

Cela fait on peut, tout en conservant le même paramètre t , adjoindre à la déformation γ_{pr}^i une déformation projective convenable, de manière que les équations de la géodésique déformée n'aient pas non plus de second membre. Ceci étant fait, les conditions pour que ξ^i soit direction d'osculation s'écrivent :

$$(98) \quad \gamma_{pr}^i \xi^p \xi^r = 0 \quad (\gamma_{pr}^i = \gamma_{rp}^i)$$

les directions cherchées sont donc les directions communes à n cônes du second degré. De telles directions n'existent pas si la déformation est quelconque. Par contre on peut toujours faire un choix des γ_{pr}^i de manière que la déformation correspondante possède, pour chaque point, q directions d'osculation arbitrairement données, variant d'une manière continue avec le point d'application. A partir de $q = \frac{n(n+1)}{2}$, toutes les directions seraient directions d'osculation et on retomberait sur la transformation projective qui conserve toutes les géodésiques.

Nous allons considérer particulièrement la déformation pour laquelle il existe n directions d'osculation données. Arrangeons-nous pour qu'en P ces directions soient prises pour directions coordonnées. On devra écrire que les équations des cônes (98) ne contiennent que des termes rectangles et pas de termes carrés, ce qui donne

$$\gamma_{pp}^i = 0$$

ces n^2 conditions se réduisent à $n(n-1)$ si on tient compte que ce résultat n'est obtenu qu'à une transformation projective près ; il suffira donc d'avoir

$$(99) \quad \gamma_{pp}^i = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq p$$

les autres variations pouvant être prises arbitrairement ; si donc i, k, r sont trois indices différents la variation considérée sera définie par :

$$(100) \quad \gamma_{ik}^r = \text{quelconque}, \quad \gamma_{ir}^r = qcq, \quad \gamma_{ii}^r = 0, \quad \gamma_{ii}^i = qcq$$

ces composantes sont naturellement écrites suivant le système d'axes envisagé.

II. A côté de la déformation axiale nous définirons la déformation axonométrique, comme déformation conservant le caractère axonométrique de l'espace (lorsque ce caractère existe), relativement à des directions d'axes données et à un champ de quadriques déterminé dont ces directions d'axes constituent un système de directions conjuguées. D'après (95) et (96), si on désigne par $\mathcal{G}_{r,ik}$ la variation de $S_{r,ik}$ entraînée par la déformation, on aura en projetant ce tenseur sur les axes de la déformation :

$$(101) \quad \mathcal{G}_{r,ik} = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq k$$

$$(102) \quad \mathcal{G}_{r,ii} = \text{quelconque}$$

Nous pouvons laisser de côté les variations de torsion, quitte à effectuer ensuite une déformation isométrique arbitraire relativement au champ de quadriques g_{ik} ; on a alors en vertu de (88) et (101), et en tenant compte de (95)

$$(103) \quad \gamma_{kr,i} + \gamma_{ir,k} = 0, \quad \gamma_{ki,i} + \gamma_{ii,k} = 0, \quad (\gamma_{kr,p} = \gamma_{rk,p})(i \neq k)$$

on en déduit les relations suivantes (i, k, r étant des indices différents),

$$(104) \quad \gamma_{ik}^r = 0, \quad \gamma_{ir}^r = -\frac{g_{ii}}{g_{ir}} \gamma_{kr}^i, \quad \gamma_{ii}^r = qcq, \quad \gamma_{ii}^i = qcq.$$

La comparaison de (100) et (104) nous révèle tout d'abord l'existence de déformations qui sont à la fois axiales et axonométriques. Une telle déformation porte sur les n composantes Γ_{ii}^i de la connexion affine, relatives aux directions d'axes envisagées. Nous pourrions l'appeler la déformation axiale axonométrique. Son expression générale s'obtiendra en adjoignant arbitrairement à la variation $\gamma_{ii,i}$ un changement de torsion $\lambda_{ik,r}$ isométrique, c'est-à-dire vérifiant la relation tirée de (88) :

$$\lambda_{kri} + \lambda_{irk} = 0$$

λ_{ikr} est donc un tenseur covariant symétrique gauche dans deux quelconques de ses indices.

Les mêmes équations (100) et (104) nous donnent en même temps la démonstration du théorème fondamental suivant, d'après lequel les déformations axiale et axonométrique peuvent être considérées comme des déformations complémentaires.

Toute déformation de l'espace à connexion affine peut être considérée comme le résultat d'une déformation axiale et d'une déformation axonométrique de même orientation arbitrairement donnée.

Soit D une déformation quelconque, on peut la décomposer en

$$D = A + M.$$

A étant une déformation axiale ; M une déformation axonométrique. Soit α une déformation axiale-axonométrique de même orientation que les précédentes, on aura évidemment une nouvelle décomposition

$$D = (A + \alpha) + (-\alpha + M)$$

que nous ne considérons pas comme essentiellement distincte de la précédente.

Avec cette convention, la décomposition ne peut s'effectuer que d'une manière, lorsque le champ de quadriques est donné ainsi qu'un champ d'axes conjugués par rapport aux quadriques du champ. Comme cas particulier il peut arriver que les directions d'axes choisies soient les tangentes à un réseau de courbes, par exemple le réseau des courbes coordonnées.

CHAPITRE II

§ 1. — LA DYNAMIQUE DE L'ÉTHER.

Le problème de l'éther est à la fois statique et dynamique. Sous sa forme statique, il consiste à représenter par un tenseur géométrique tout état du champ (électromagnétique, gravifique) susceptible d'être mesuré ; c'est ce que fait Einstein pour l'énergie, H. Weyl pour le champ électromagnétique.

Sous sa forme dynamique il consiste à déterminer un principe d'évolution qui détermine l'état de l'éther connaissant certaines conditions initiales convenables ; c'est le principe de Hamilton qui semble jouer ici le rôle essentiel, comme dans la théorie initiale de Mie ⁽¹⁾ qui a servi de modèle aux théories ultérieures de H. Weyl et Einstein ⁽²⁾.

Pour résoudre le problème statique, il n'existe pas de méthode véritable, et les résultats acquis par Einstein et Weyl sont dus en grande partie à l'intuition physico-mathématique ; lorsqu'on a déterminé le véritable caractère tensoriel d'une grandeur physique, il s'agit de reconnaître le tenseur géométrique qui en constitue la représentation naturelle ; la première idée qui se présente est que cette représentation peut se faire de bien des manières, mais si on se limite aux tenseurs géométriques des ordres les plus faibles, le problème n'apparaît plus comme indéterminé.

Dans la classification fondamentale dont la première idée est due à Mie, les grandeurs physiques sont rangées en deux caté-

⁽¹⁾ MIE, *Grundlagen einer Theorie der Materie. Ann. d. Phys.*, 37 (1912), p. 511 ; 39 (1912), p. 1 ; 40 (1913), p. 1.

H. WEYL, *Raum. Zeit. Materie*, 3 Auflage, § 26.

⁽²⁾ EINSTEIN, *Sitzber.* Berlin, 1923, p. 32.

gories ; les unes sont représentées par des tenseurs qui se calculent immédiatement comme invariants différentiels de la métrique ou de la connexion affine ; ce sont les « intensités ». Les autres sont représentées par des densités tensorielles ⁽¹⁾ et sont connues par l'intermédiaire d'une fonction d'action $\mathcal{A}$.

Cette fonction d'action est elle-même une densité scalaire formée avec les seules grandeurs d'intensité, et c'est elle qui sert à écrire le principe de Hamilton ou de variation stationnaire :

$$\delta \int \mathcal{A} \cdot dx = 0 \quad (dx = dx^1 \cdot dx^2 \cdot dx^3 \cdot dx^0)$$

δ est une variation étendue à un volume n dimensionnel quelconque (pour l'éther physique on a $n=4$).

Les coordonnées $x^1 x^2 x^3$ sont, à moins d'indication contraire, des coordonnées cartésiennes de l'espace euclidien habituel, et x^0 la coordonnée de temps habituelle ; rien n'impose d'ailleurs ce choix de coordonnées, et le caractère tensoriel des équations que nous écrirons, permettra de les transcrire immédiatement dans n'importe quel système de repérage.

Dans la théorie la plus générale, les paramètres de variation sont les composantes de la connexion affine, la variation devenant nulle à la frontière du domaine considéré.

Le tenseur le plus simple qu'on puisse utiliser dans l'espace à connexion affine général est le tenseur de torsion défini par :

$$(1) \quad \Gamma_{ik}^r - \Gamma_{ki}^r = \Lambda_{ik}^r$$

les composantes Γ_{ik}^r de la connexion affine de l'espace n'étant pas elles-mêmes les composantes d'un tenseur.

Après le tenseur de torsion il sera nécessaire de faire intervenir le tenseur de courbure. Pour notre but nous n'aurons besoin que du tenseur contracté :

$$(2) \quad R_{ri} = \frac{\partial \Gamma_{ir}^s}{\partial x^s} - \frac{\partial \Gamma_{is}^r}{\partial x^r} + \Gamma_{ir}^q \cdot \Gamma_{qs}^s - \Gamma_{is}^q \cdot \Gamma_{qr}^s.$$

C'est à l'aide de ce tenseur qu'Einstein forme le tenseur énergétique et que H. Weyl forme le champ électromagnétique.

Ce dernier auteur n'envisage que des espaces sans torsion et il remarque que la partie symétrique gauche du tenseur (2) se

(1) H. WEYL, *loc. cit.*

présenté sous la forme d'une rotation ; il l'assimile pour cette raison au champ électromagnétique qui possède ce même caractère tensoriel. Les choses ne se présentent pas de même lorsque la torsion existe ; si nous appelons E_{ri} le champ électromagnétique, la formule de Weyl subira la correction suivante ⁽¹⁾ :

$$(3) \quad E_{ri} = \frac{1}{2} (R_{ri} - R_{ir} + D_s \Lambda_{ri}^s) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Gamma_{rs}^s}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{is}^s}{\partial x^r} \right)$$

et le tenseur symétrique gauche $E_{[ri]}$ pourra représenter le champ électromagnétique, car on aura bien [chap. I, éq. (66)]

$$(4) \quad \text{Rot } E_{ri} = 0.$$

A côté du tenseur symétrique gauche E_{ri} , représentatif du champ électromagnétique, nous considérons le tenseur symétrique

$$(5) \quad K_{ri} = \frac{1}{2} (R_{ri} + R_{ir}).$$

Eddington ⁽²⁾ choisissait ce tenseur comme tenseur métrique fondamental, mais nous verrons que ce choix n'est légitime qu'en l'absence de toute manifestation électromagnétique, et dans des domaines atomiques.

Nous appellerons désormais ce tenseur le tenseur *gravifique*.

Formons maintenant une densité scalaire $\mathcal{A}$ qui soit fonction des seules grandeurs de champ électromagnétique et gravifique que nous venons de définir. Dans la théorie de Mie, le potentiel vecteur figure aussi explicitement dans l'expression de la fonction d'action ; mais nous ne connaissons pas encore de tenseur capable de représenter ce potentiel, les expressions Γ_{rs}^s qui figurent dans (3) n'étant pas les composantes d'un vecteur véritable.

Nous définissons alors les densités tensorielles électromagnétique et gravifique respectivement par les formules ⁽³⁾ :

$$(6) \quad \mathcal{H}^{ir} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial E_{ri}} \quad \mathcal{H}^{ir} = -\mathcal{H}^{ri} = \mathcal{H}^{ir} - \mathcal{H}^{ri}$$

$$(7) \quad \mathcal{G}^{ir} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial K_{ri}} \quad \mathcal{G}^{ir} = \mathcal{G}^{ri} = \mathcal{G}^{ir} + \mathcal{G}^{ri}.$$

(1) Cette formule subira encore par la suite (éq. 13) une nouvelle correction dont la légitimité ne peut pas apparaître pour le moment.

(2) EDDINGTON, *The Mathematical Theory of Relativity*. Cambridge, 1923 (University Press).

(3) La formule (7) sera légèrement modifiée au § 2 (équation 32).

Les équations de l'éther vont alors se déduire du principe de variation stationnaire :

$$(8) \quad \delta \int \mathcal{A} dx = 0 \quad (dx = dx^1 dx^2 \dots dx^n).$$

$\mathcal{A}$ est une fonction des composantes $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ et de leurs dérivées premières par l'intermédiaire de E_{ri} et K_{ri} ; les paramètres de variation sont les composantes $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ de la connexion affine; ces paramètres restent fixes sur les frontières du domaine. Dans les conditions de continuité requises pour l'application des théorèmes de Stokes-Poincaré, on pourra substituer aux équations (8) les équations d'Euler :

$$(8') \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma}{\partial x^\sigma}} - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma} = 0$$

or nous avons en vertu de (1), (2), (3), (5)

$$(9) \quad E_{ri} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Gamma_{rs}^\gamma}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{is}^\gamma}{\partial x^r} \right)$$

$$(9') \quad K_{ri} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Gamma_{ir}^s}{\partial x^s} + \frac{\partial \Gamma_{ri}^s}{\partial x^s} - \frac{\partial \Gamma_{is}^s}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma_{rs}^s}{\partial x^i} \right. \\ \left. + \Gamma_{ir}^q \Gamma_{qs}^s + \Gamma_{ri}^q \Gamma_{qs}^s - \Gamma_{is}^q \Gamma_{qr}^s - \Gamma_{rs}^q \Gamma_{qi}^s \right).$$

Nous aurons pour développer (8) en tenant compte de (6), (7), (9)

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma} = \frac{1}{2} \mathcal{H}^{ir} \left(\epsilon_r^\alpha \epsilon_i^\beta \epsilon_\gamma^\sigma - \epsilon_i^\alpha \epsilon_r^\beta \epsilon_\gamma^\sigma \right) \\ + \frac{1}{2} \mathcal{G}^{ir} \left(\epsilon_i^\alpha \epsilon_r^\beta \epsilon_\gamma^\sigma + \epsilon_r^\alpha \epsilon_i^\beta \epsilon_\gamma^\sigma - \epsilon_i^\alpha \epsilon_\gamma^\beta \epsilon_r^\sigma - \epsilon_r^\alpha \epsilon_\gamma^\beta \epsilon_i^\sigma \right) \\ = \frac{1}{2} \left(\epsilon_r^\beta \cdot \mathcal{H}^{\sigma\alpha} + \epsilon_\gamma^\sigma \cdot \mathcal{G}^{\alpha\beta} - \epsilon_i^\beta \cdot \mathcal{G}^{\alpha\sigma} \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma} = \frac{1}{2} \mathcal{G}^{ir} \cdot \left[\epsilon_i^\alpha \epsilon_r^\beta \epsilon_\gamma^q \cdot \Gamma_{qs}^s + \epsilon_q^\alpha \epsilon_\gamma^\beta \Gamma_{ir}^q + \epsilon_r^\alpha \epsilon_i^\beta \epsilon_\gamma^q \Gamma_{qs}^s + \epsilon_q^\alpha \epsilon_\gamma^\beta \Gamma_{ri}^q \right. \\ \left. - \epsilon_i^\alpha \epsilon_s^\beta \epsilon_\gamma^q \Gamma_{qr}^s - \epsilon_q^\alpha \epsilon_r^\beta \epsilon_\gamma^s \Gamma_{is}^q - \epsilon_r^\alpha \epsilon_\gamma^\beta \epsilon_\gamma^q \Gamma_{qi}^s - \epsilon_q^\alpha \epsilon_i^\beta \epsilon_\gamma^s \Gamma_{rs}^q \right] \\ = \frac{1}{2} \left(\mathcal{G}^{\alpha\beta} \cdot \Gamma_{\gamma s}^s + \epsilon_\gamma^\beta \cdot \mathcal{G}^{ir} \cdot \frac{\Gamma_{ir}^\alpha + \Gamma_{ri}^\alpha}{2} - \mathcal{G}^{\alpha r} \Gamma_{\gamma r}^\beta - \mathcal{G}^{r\beta} \Gamma_{r\gamma}^\alpha \right).$$

Nous portons dans (8)' et nous utilisons les abréviations suivantes :

$$(10) \quad \Gamma_{ir}^{*\alpha} = \frac{1}{2} (\Gamma_{ir}^\alpha + \Gamma_{ri}^\alpha)$$

$$D_s^* \zeta^i = \frac{\partial \zeta^i}{\partial x^s} - \zeta^p \cdot \Gamma_{ps}^{*i}$$

$$\Gamma_{is}^s = \Gamma_i \quad \Lambda_{is}^s = \Lambda_i.$$

Il vient les équations :

$$(11) \quad D_{\gamma}^* \mathcal{G}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \Lambda_{\gamma} \cdot \mathcal{G}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (\mathcal{G}^{\alpha r} \Lambda_{\gamma r}^{\beta} + \mathcal{G}^{\beta r} \Lambda_{r\gamma}^{\alpha}) - \varepsilon_{\gamma}^{\beta} \cdot D_{\sigma}^* (\mathcal{G}^{\alpha\sigma} + \mathcal{H}^{\alpha\sigma}) = 0$$

il suffit de se reporter, pour le vérifier, à la formule de dérivation covariante des densités tensorielles (Chap. 1, éq. 40).

La contraction suivant les indices γ et α de (11) conduit d'abord à l'équation :

$$(12) \quad D_{\gamma}^* \mathcal{H}^{\gamma\alpha} = 0$$

qui développée donne simplement

$$(13) \quad \frac{\partial \mathcal{H}^{\sigma\alpha}}{\partial x^{\sigma}} = 0$$

et qui exprime que la densité électromagnétique a une divergence nulle, ou encore que l'espace n'est le siège d'aucun courant électrique. C'est ce qu'on trouve aussi dans la théorie de Mie lorsqu'on admet que la fonction d'action ne renferme pas explicitement le potentiel vecteur. Nous obtiendrons la généralisation immédiate de (13) quand nous aurons déterminé la nature tensorielle du potentiel vecteur. En permutant dans (11) les indices $\alpha\beta$ et combinant l'équation obtenue avec la précédente par addition et soustraction, on obtient :

$$(14) \quad D_{\gamma}^* \mathcal{G}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \Lambda_{\gamma} \mathcal{G}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2(n-1)} (\varepsilon_{\gamma}^{\alpha} \mathcal{G}^{\beta\sigma} \Lambda_{\sigma} + \varepsilon_{\gamma}^{\beta} \mathcal{G}^{\alpha\sigma} \Lambda_{\sigma}) = 0$$

$$(15) \quad \mathcal{G}^{\beta r} \Lambda_{r\gamma}^{\alpha} - \mathcal{G}^{\alpha r} \Lambda_{r\gamma}^{\beta} = \frac{1}{n-1} (\varepsilon_{\gamma}^{\alpha} \mathcal{G}^{\beta\sigma} \Lambda_{\sigma} - \varepsilon_{\gamma}^{\beta} \mathcal{G}^{\alpha\sigma} \Lambda_{\sigma}).$$

Les équations (14) et (15) qui constituent avec (13) le deuxième système des équations de l'éther (2 et 3 forment le premier système) nous donnent de précieux renseignements sur la nature géométrique de l'éther.

Étudions tout d'abord (14). Considérons un espace de Riemann (sans torsion) associé à l'espace donné, et dont $\mathcal{G}^{\alpha\beta}$ serait la densité tensorielle fondamentale. Le tenseur métrique sera parfaitement déterminé par les équations

$$\sqrt{g} g^{ik} = \mathcal{G}^{ik}.$$

L'excès du pseudo-tenseur Γ_{ik}^r sur le pseudo-tenseur $\left\{ \begin{smallmatrix} r \\ ik \end{smallmatrix} \right\}$ sera un tenseur symétrique véritable u_{ik}^r que l'équation (14) permet

de déterminer sans difficulté ; pour cela on développera $D_{\gamma}^{\alpha\beta}$, on remplacera les Γ_{ik}^r par $\{_{ik}^r\} + u_{ik}^r$ et on tiendra compte de l'équation (50) du chap. I ; il viendra

$$(16) \quad G^{\alpha\beta} u_{\rho\gamma}^{\beta} + G^{\beta\rho} u_{\rho\gamma}^{\alpha} - G^{\alpha\beta} u_{\rho\gamma}^{\rho} = \frac{1}{2} G^{\alpha\beta} \Lambda_{\gamma} + \frac{1}{2(1-n)} (\varepsilon_{\gamma}^{\alpha} G^{\beta\sigma} \Lambda_{\sigma} + \varepsilon_{\gamma}^{\beta} G^{\alpha\sigma} \Lambda_{\sigma})$$

en abaissant l'indice α et contractant en α et β , on trouve successivement :

$$u_{\alpha\gamma}^{\beta} + g^{\beta\rho} u_{\rho\gamma, \alpha} - \varepsilon_{\beta}^{\rho} u_{\rho\gamma}^{\rho} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha}^{\beta} \Lambda_{\gamma} + \frac{1}{2(1-n)} (g_{\gamma\alpha} \Lambda^{\beta} + \varepsilon_{\gamma}^{\beta} \Lambda_{\alpha})$$

$$u_{\gamma}(2-n) = \frac{n}{2} \Lambda_{\gamma} + \frac{1}{1-n} \Lambda_{\gamma}$$

$$u_{\gamma} = \frac{1+n}{2(1-n)} \Lambda_{\gamma}$$

et en substituant cette valeur de (16) il vient après abaissement de α et β

$$u_{\alpha\gamma, \beta} + u_{\beta\gamma, \alpha} = \frac{1}{2(1-n)} (2g_{\alpha\beta} \Lambda_{\gamma} + g_{\alpha\gamma} \Lambda_{\beta} + g_{\beta\gamma} \Lambda_{\alpha})$$

en permutant l'indice γ successivement avec α et β , on a deux nouvelles équations ; en ajoutant ces deux équations membre à membre et retranchant la précédente, on trouve par un calcul bien connu

$$u_{\alpha\beta, \gamma} = \frac{1}{2(1-n)} (g_{\alpha\gamma} \Lambda_{\beta} + g_{\beta\gamma} \Lambda_{\alpha})$$

et par suite

$$(17) \quad \Gamma_{ik}^* = \{_{ik}^r\} + \frac{1}{2(1-n)} (\varepsilon_i^r \Lambda_k + \varepsilon_k^r \Lambda_i).$$

Cette importante formule démontre le caractère projectif riemannien de l'éther (Chap. I, éq. 85). Elle nous permet déjà d'affirmer que l'éther a les mêmes lignes géodésiques que son espace de Riemann associé. Mais l'équation (15) va nous donner un autre résultat aussi intéressant que le premier. Posons :

$$(18) \quad \pi_{\alpha\beta}^{\gamma..} = \Lambda_{\alpha\beta}^{\gamma..} - \frac{1}{1-n} (\varepsilon_{\alpha}^{\gamma} \Lambda_{\beta} - \varepsilon_{\beta}^{\gamma} \Lambda_{\alpha})$$

le petit calcul qui va suivre exige que les indices se rangent dans un ordre déterminé ; des points sont utilisés pour aider à reconnaître cet ordre. On aura d'abord par contraction des indices γ et β

$$(19) \quad \pi_{\alpha\beta}^{\beta..} = 0$$

et en substituant dans (15) la valeur de $\Lambda_{\alpha\beta}^\gamma$ tirée de (18), il vient

$$(20) \quad \pi_{\alpha\gamma}^{\beta\alpha} - \pi_{\alpha\gamma}^{\alpha\beta} = 0$$

en vertu de cette équation le tenseur $\pi_{\alpha\beta\gamma}$ serait donc symétrique dans ses deux premiers indices, tandis que d'après (18) il est symétrique gauche dans ses deux derniers indices. Il ne peut donc être qu'identiquement nul, en vertu des identités

$$\pi_{\alpha\beta\gamma} = \pi_{\beta\alpha\gamma} = -\pi_{\beta\gamma\alpha} = -\pi_{\gamma\beta\alpha} = \pi_{\gamma\alpha\beta} = \pi_{\alpha\gamma\beta} = -\pi_{\alpha\beta\gamma}$$

on a donc au lieu de (18)

$$(21) \quad \Lambda_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{1-n} (\varepsilon_{\alpha}^{\gamma} \Lambda_{\beta} - \varepsilon_{\beta}^{\gamma} \Lambda_{\alpha})$$

et en combinant cette formule avec (17) on obtient l'expression définitive de la connexion affine de l'éther

$$(22) \quad \Gamma_{ik}^r = \left\{ \begin{matrix} r \\ ik \end{matrix} \right\} + \frac{1}{1-n} \varepsilon_i^r \Lambda_k$$

Elle montre que l'éther porte une métrique de Weyl, on trouve en effet, conformément à l'éq. (72) du chap. 1,

$$D_\gamma g_{\alpha\beta} = \frac{2}{n-1} g_{\alpha\beta} \cdot \Lambda_\gamma$$

L'éther est une sorte d'espace de Weyl à torsion. Il est donc applicable conformément sur l'espace de Riemann associé.

En résumé, l'éther est un espace à connexion affine qui se déduit d'un certain espace de Riemann par une transformation projective conforme (Chap. 1, § 6). Ses lignes géodésiques et ses lignes isotropes sont les mêmes que celles de l'espace de Riemann associé.

L'équation (22) nous fournit de plus ce qui nous manquait relativement à la nature géométrique du potentiel vecteur.

En effet l'équation (3) peut maintenant s'écrire :

$$E_{ri} = \frac{1}{2(n-1)} \left(\frac{\partial \Lambda_i}{\partial x^r} - \frac{\partial \Lambda_r}{\partial x^i} \right).$$

Le potentiel vecteur n'est autre que la torsion contractée de l'espace.

A vrai dire il figure dans cette expression de E_{ri} un facteur parasite $\frac{1}{2(n-1)}$. Il ne joue aucun rôle essentiel et nous allons

tout de suite l'éliminer en substituant à l'équation de définition (3) la suivante :

$$(23) \quad E_{ri} = \left(\frac{\partial \Lambda_i}{\partial x^r} - \frac{\partial \Lambda_r}{\partial x^i} \right).$$

Il nous reste à voir si les résultats précédents subsistent lorsque la fonction d'action dépend explicitement du potentiel vecteur.

Aux formules (6) et (7) nous adjoindrons la suivante :

$$(24) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda_i} = C^i.$$

On aura ici :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma}{\partial x^\sigma}} &= \varepsilon_\gamma^\beta \cdot \mathcal{H}^{\alpha\sigma} - \varepsilon_\gamma^\alpha \cdot \mathcal{H}^{\beta\sigma} + \frac{1}{2} (\varepsilon_\gamma^\sigma \cdot \mathcal{G}^{\alpha\beta} - \varepsilon_\gamma^\beta \cdot \mathcal{G}^{\alpha\sigma}) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma} &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{G}^{\alpha\beta} \Gamma_{\gamma s}^\sigma + \varepsilon_\gamma^\beta \cdot \mathcal{G}^{ir} \cdot \frac{\Gamma_{ir}^\alpha + \Gamma_{ri}^\alpha}{2} - \mathcal{G}^{\alpha r} \cdot \Gamma_{\gamma r}^\beta - \mathcal{G}^{r\beta} \cdot \Gamma_{r\gamma}^\alpha \right) + \varepsilon_\gamma^\beta C^\alpha - \varepsilon_\gamma^\alpha C^\beta \end{aligned}$$

rien n'est à changer aux calculs précédemment faits, sauf que $\frac{\partial \mathcal{H}^{\alpha\sigma}}{\partial x^\sigma}$ est remplacée maintenant par $\left(\frac{\partial \mathcal{H}^{\alpha\sigma}}{\partial x^\sigma} - C^\alpha \right)$, l'équation (13) est généralisée ainsi par la suivante :

$$(25) \quad \frac{\partial \mathcal{H}^{\alpha\sigma}}{\partial x^\sigma} = C^\alpha.$$

C^α représente bien, conformément à la théorie de Mie, la densité de courant, comme divergence de la densité électromagnétique, et en même temps d'après (24) comme dérivée partielle de la fonction d'action par rapport au potentiel.

Comme conséquence de l'équation (25), on peut écrire le théorème de la conservation de l'électricité, en prenant la divergence de deux membres :

$$(26) \quad \frac{\partial C^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0.$$

Nous voulons maintenant écrire le théorème de l'énergie, qui dans cette théorie correspond au théorème d'Einstein. Portons pour cela (22) dans (2); on trouve sans peine :

$$(27) \quad K_{ri} = \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} s \\ ir \end{smallmatrix} \right\}}{\partial x^s} - \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} s \\ is \end{smallmatrix} \right\}}{\partial x^r} + \left\{ \begin{smallmatrix} q \\ ir \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} s \\ qs \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} q \\ is \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} s \\ qr \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} s \\ sri \end{smallmatrix} \right\}$$

on aurait pu tout aussi bien remarquer que ni une transformation projective, ni une transformation conforme, ne modifient le tenseur symétrique K_{ri} d'un espace de Riemann donné. Si donc on pose pour la densité d'énergie totale $\mathcal{E}_p^r$:

$$(28) \quad \mathcal{E}_p^r = -\mathcal{G}_{ij}^r K_{ip} + \frac{1}{2} \varepsilon_p^r \cdot \mathcal{G}_{ij}^{ik} \cdot K_{ik}$$

cette densité satisfait au théorème riemannien de conservation :

$$(29) \quad \frac{\partial \mathcal{E}_p^r}{\partial x^r} - \mathcal{E}_q^r \{q \}_{pr} = 0.$$

Comme dans la théorie d'Einstein, la densité d'énergie peut encore comprendre un terme cosmologique, par exemple ⁽¹⁾

$$(30) \quad -\mathcal{E}_p^r = \mathcal{G}_{ij}^r K_{ip} - \frac{1}{2} \varepsilon_p^r \mathcal{G}_{ij}^{ik} K_{ik} + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \lambda \cdot \varepsilon_p^r \cdot \sqrt{g}$$

où λ est une constante, la constante cosmologique d'Einstein. Nous serons encore plus tard conduits à multiplier cette expression par une constante ⁽²⁾. Le caractère conservatif ne sera naturellement pas modifié.

Nous avons donc formé le système complet des équations de la dynamique de l'éther. Ce sont les équations (2) et (23) qui généralisent les équations de l'induction, et les équations (18) et (25) qui tiennent la place des équations de la condensation. Nous voulons nous assurer que la théorie précédente peut contenir à la fois la Gravifique d'Einstein et l'Électromagnétique de Lorentz.

§ 2. — ÉQUATION GÉNÉRALE DE LA GRAVITATION

Si un domaine est électriquement vide, c'est-à-dire s'il n'est le siège d'aucune manifestation électromagnétique, la fonction d'action $\mathcal{A}$ qui le caractérise doit être formée avec les K_{ri} seuls, à l'exclusion des E_{ri} et des Λ_i . Or la seule densité tensorielle qu'on puisse construire avec les seules composantes K_{ri} est à une constante multiplicative près la racine carrée du déterminant des éléments K_{ri} . Nous allons établir que dans ces conditions les K_{ri} ne diffèrent des g_{ri} que par un facteur constant.

(1) Voir note 1 du § suivant.

(2) Voir équation 33.

Appelons k^{ri} le mineur de K_{ri} dans le déterminant k des K_{ri} .
On a :

$$\frac{\partial k}{\partial K_{ri}} = k^{ri}$$

si d'autre part la fonction d'action est

$$A_0 = \mu \cdot \sqrt{k}$$

il viendra

$$\frac{\partial A_0}{\partial K_{ri}} = \frac{1}{2\sqrt{k}} \mu k^{ri}$$

mais d'après (7) on a aussi

$$\frac{\partial A_0}{\partial K_{ri}} = \frac{1}{2} \sqrt{g} \cdot g^{ri}$$

par suite on a l'identité

$$\frac{\mu}{\sqrt{k}} k^{ri} = \sqrt{g} \cdot g^{ri}.$$

Formons les déterminants qui ont pour éléments respectivement les deux membres de ces équations, et égalons leurs valeurs numériques ; le déterminant des k^{ri} est k^{n-1} , celui des g^{ri} est $\frac{1}{g}$. Donc :

$$\mu^n \cdot k^{\frac{n}{2}-1} = g^{\frac{n}{2}-1}$$

d'où

$$k = \mu^{\frac{n}{1-\frac{n}{2}}} \cdot g$$

posons pour simplifier

$$\mu^{\frac{1}{1-\frac{n}{2}}} = \lambda$$

l'équation précédente devient

$$k = \lambda^n \cdot g$$

en passant aux mineurs k^{ri} il vient ensuite

$$k^{ri} = \lambda^{n-1} \cdot g g^{ri}$$

on en déduit enfin

(31)

$$K_{ri} = \lambda g_{ri}$$

$$A_0 = \lambda^{1-\frac{n}{2}} \sqrt{|K_{ri}|} = \lambda \cdot \sqrt{g}.$$

L'équation (31) est l'équation de la gravitation dans les milieux électriquement vides. Si on identifie la constante λ de (31) avec la constante λ de (30) on voit que la densité énergétique est identiquement nulle dans les milieux en question (1).

La formule (31) nous fait penser qu'une infinité d'univers sont théoriquement possibles, chacun correspondant à une valeur numérique déterminée de λ . Nous admettons dans ce qui suit que l'éther proprement dit correspond à $\lambda = 0$, tandis que les atomes seront des univers fermés à courbure énorme correspondant à des valeurs considérables de λ .

La dynamique de l'éther ne serait ainsi que la limite lorsque λ tend vers zéro, d'une dynamique de l'atome, plus générale.

Nous allons entreprendre maintenant l'étude électromagnétique de l'atome et de l'éther. Il faut pour cela faire choix de la fonction d'action. Elle sera formée dans le cas général à l'aide des grandeurs d'intensité

$$E_{ri} K_{ri} \Lambda_r.$$

Formons le déterminant des éléments

$$K_{ir} + \alpha \cdot E_{ir} + \beta \Lambda_i \Lambda_r$$

en le développant on obtient une forme algébrique de degré n en α, β dont les coefficients sont des carrés de densités tensorielles. Il en sera de même d'une combinaison linéaire de ces coefficients. Les racines carrées de telles expressions, qu'on peut encore combiner linéairement entre elles, constituent donc des fonctions d'action possibles.

On pourrait penser par exemple à la fonction d'action suivante

$$\mathcal{A} = \lambda^{1-\frac{n}{2}} \sqrt{|K_{ir} + \mu E_{ir} + \nu \Lambda_i \Lambda_r|}$$

μ et ν étant deux constantes nouvelles caractérisant la nature électrique des milieux envisagés.

Il nous faut ici lever immédiatement une difficulté qui se présente. L'expression de $\mathcal{A}$ écrite ci-dessus s'évanouirait identiquement dans l'éther proprement dit ($\lambda = 0$) et ne serait d'aucun

(1) Nous avons ajouté dans l'équation (30) un terme cosmologique tel que cette condition soit réalisée.

secours pour étudier ce qui s'y passe. Mais il nous suffit de substituer à l'équation (7) la suivante

$$(32) \quad \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial K_{ir}} = \frac{1}{\lambda} \mathcal{C}^{iri}.$$

Au lieu de (30) nous poserons

$$(33) \quad -\lambda \mathcal{C}_p^r = \mathcal{C}_p^{ir} K_{ip} - \frac{1}{2} \varepsilon_p^r \cdot \mathcal{C}_p^{ik} K_{ik} + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \lambda \varepsilon_p^r \sqrt{g}$$

A la densité énergétique totale $\mathcal{C}_p^r$ nous ferons correspondre un tenseur par la formule

$$(34) \quad T_{pr} = \frac{1}{\sqrt{g}} \mathcal{C}_p^q \cdot g_{qr}.$$

On déduit alors de (33) par contraction des indices

$$-\lambda T = (K - n\lambda) \left(1 - \frac{n}{2} \right)$$

en éliminant K entre cette équation et (33) il vient

$$(35) \quad K_{pr} = \lambda \left(g_{pr} + \frac{1}{n-2} g_{pr} \cdot T - T_{pr} \right).$$

Cette équation, qui généralise (31), doit être considérée comme l'équation générale de la gravitation, lorsqu'il existe une énergie électromagnétique.

Elle nous montre, comme cas particulier, que le tenseur K_{pr} est identiquement nul à l'extérieur de l'atome ($\lambda = 0$) même s'il existe un tenseur énergétique électromagnétique.

Grâce aux modifications contenues dans (32) et (33) la fonction d'action pourra devenir ici

$$\mathcal{A} = \sqrt{\left| g_{pr} + \frac{1}{n-2} g_{pr} \cdot T - T_{pr} + \mu E_{pr} + \nu \Lambda_p \Lambda_r \right|}$$

et elle ne s'évanouira plus dans le vide, comme il est bien nécessaire de le penser.

Nous verrons au § 4 que la constante μ doit être prise égale à un dans l'éther, pour être en accord avec la théorie de Lorentz. Nous la ferons égale à un dans tous les cas.

La constante ν est assujettie à la seule condition d'être nulle dans l'éther où la théorie de Lorentz nous apprend qu'il n'y a pas de courant; sur ce faible indice nous pouvons tenter de suppo-

ser γ proportionnel à la constante cosmologique et nous arrêter à la fonction d'action suivante :

$$(36) \quad \mathcal{A} = \sqrt{\left| g_{pr} + \frac{1}{n-2} g_{pr} T - T_{pr} + E_{pr} + \frac{1}{2} \lambda \cdot \Delta_p \Delta_r \right|}$$

il est entendu qu'on prend la racine carrée du déterminant des éléments qui figurent entre les deux traits verticaux.

Nous rattacherons au § 4 la théorie déduite de cette fonction d'action à la théorie de Lorentz et nous tâcherons d'obtenir par extrapolation des lois valables dans l'atome. Il importe auparavant d'élucider le problème de l'énergie.

Faisons une dernière remarque au sujet de l'équation (35). Dans un travail auquel nous avons beaucoup emprunté ⁽¹⁾, Einstein a cru devoir prendre K_{pr} comme tenseur métrique fondamental, comme l'avait fait aussi Eddington. Ce choix n'est pas naturel, en ce sens qu'il fait disparaître sans compensation l'admirable simplicité géométrique de l'éther, telle qu'elle se présente lorsqu'on définit la métrique par (7) ou par (32). Lorsqu'on a vu que l'éther est applicable conformément sur un espace de Riemann, il semble d'ailleurs bien impossible de vouloir l'affecter d'une autre métrique que de celle de l'espace de Riemann conforme.

§ 3. — LES COMPOSANTES DE L'ÉNERGIE TOTALE.

La formule (33) sert de définition à l'énergie totale. Nous voulons chercher maintenant quelle relation il y a entre cette énergie et les formes d'énergie qui nous sont connues par les théories électromagnétiques. Pour expression de l'énergie du champ électromagnétique nous pouvons tout d'abord prendre la suivante ⁽²⁾

$$(37) \quad g_p^r = \mathcal{H}^{ir} E_{ip} - \frac{1}{n} \epsilon_p^r \cdot \mathcal{H}^{ik} E_{ik}.$$

Nous avons encore l'énergie de courant dont l'expression com-

(1) Voir note 2, page 35.

(2) WEYL, *Raum. Zeit. Materie*, 4^e éd., § 20, p. 150, éq. (22').

plète sera donnée dans un instant, et qui est formée à l'aide du potentiel vecteur Λ_i et de la densité de courant $\mathcal{C}^i$.

Nous nous demanderons s'il n'y a pas d'autre forme d'énergie que l'énergie de champ et l'énergie de courant.

C'est l'application du théorème de Klein ⁽¹⁾ qui nous fournira la réponse. Pour cela faisons subir à l'éther une déformation définie, dans un système donné de coordonnées, par un champ vectoriel infinitésimal ξ^i . On a pour la déformation d'un tenseur quelconque a_k^i

$$(38) \quad \delta a_k^i = - \frac{\partial a_k^i}{\partial x^r} \cdot \xi^r - a_r^i \frac{\partial \xi^r}{\partial x^k} + a_k^r \cdot \frac{\partial \xi^i}{\partial x^r}$$

et en particulier pour la déformation de la densité tensorielle $\mathcal{A}$:

$$(39) \quad \delta \mathcal{A} = - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x^r} \xi^r - \mathcal{A} \frac{\partial \xi^r}{\partial x^r} = - \frac{\partial}{\partial x^r} (\mathcal{A} \xi^r)$$

mais on a par définition des grandeurs de densité, d'après (6), (24), (32)

$$(40) \quad \delta \mathcal{A} = \frac{1}{2\lambda} \mathcal{G}^{ik} \cdot \delta K_{ik} + \frac{1}{2} \mathcal{H}^{ik} \cdot \delta E_{ik} + \mathcal{C}^i \cdot \delta \Lambda_i$$

substituons aux variations qui figurent dans (42) leurs expressions tirées de (38) et (39) ; il vient :

$$\begin{aligned} \xi^r \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x^r} - \frac{1}{2\lambda} \mathcal{G}^{ik} \frac{\partial K_{ik}}{\partial x^r} - \frac{1}{2} \mathcal{H}^{ik} \frac{\partial E_{ik}}{\partial x^r} - \mathcal{C}^i \cdot \frac{\partial \Lambda_i}{\partial x^r} \right) \\ + \frac{\partial \xi^r}{\partial x^r} \left(\mathcal{A} \varepsilon_p^r - \frac{1}{\lambda} \mathcal{G}^{ir} K_{ip} - \mathcal{H}^{ir} E_{ip} - \mathcal{C}^r \Lambda_p \right) = 0 \end{aligned}$$

et comme on peut choisir arbitrairement en un point donné ξ^r et $\frac{\partial \xi^r}{\partial x^r}$, on aura les identités suivantes :

$$(41) \quad \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x^r} - \frac{1}{2\lambda} \mathcal{G}^{ik} \cdot \frac{\partial K_{ik}}{\partial x^r} - \frac{1}{2} \mathcal{H}^{ik} \cdot \frac{\partial E_{ik}}{\partial x^r} - \mathcal{C}^i \frac{\partial \Lambda_i}{\partial x^r} = 0,$$

$$(42) \quad \mathcal{A} \cdot \varepsilon_p^r - \frac{1}{\lambda} \mathcal{G}^{ir} K_{ip} - \mathcal{H}^{ir} E_{ip} - \mathcal{C}^r \Lambda_p = 0.$$

Éliminons $\mathcal{A}$ des équations (42) : on déduit de (42) par contraction :

⁽¹⁾ WEYL, § 35, p. 263.

PAULY, *Encykl. der Mat. Wiss.*, B. V₂, H. 4, p. 617, 765.

$$(43) \quad \mathfrak{A} - \frac{1}{n\gamma} \mathcal{C}^{ik} \mathbf{K}_{ik} - \frac{1}{n} \mathcal{H}^{ik} \mathbf{E}_{ik} - \frac{1}{n} \mathcal{C}^i \mathfrak{A}_i = 0$$

et en retranchant de (42) l'équation (43) multipliée par ε_p^r

$$(44) \quad \frac{1}{\lambda} \left(\mathcal{C}^{ir} \mathbf{K}_{ip} - \frac{1}{n} \varepsilon_p^r \mathcal{C}^{ik} \mathbf{K}_{ik} \right) + \left(\mathcal{H}^{ir} \mathbf{E}_{ip} - \frac{1}{n} \varepsilon_p^r \mathcal{H}^{ik} \mathbf{E}_{ik} \right) + \left(\mathcal{C}^r \Lambda_p - \frac{1}{n} \varepsilon_p^r \mathcal{C}^i \Lambda_i \right) = 0.$$

Posons pour la densité d'énergie électronique :

$$(45) \quad \mathfrak{E}_p^r = \mathcal{C}^r \Lambda_p - \frac{1}{n} \varepsilon_p^r \cdot \mathcal{C}^i \Lambda_i$$

et définissons provisoirement une énergie complémentaire par la condition

$$(46) \quad \mathcal{P}_p^r = \mathcal{C}_p^r - \mathcal{G}_p^r - \mathfrak{E}_p^r$$

où $\mathcal{C}_p^r$ est donné par (33) et $\mathcal{G}_p^r$ par (37).

Le calcul donne immédiatement

$$(47) \quad \mathcal{P}_p^r = \frac{1}{n\lambda} \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \cdot \varepsilon_p^r \cdot (\mathcal{C}^{ik} \mathbf{K}_{ik} - n\lambda \sqrt{g}).$$

Nous voyons que d'une façon générale, cette énergie complémentaire a le caractère d'une pression. En réalité l'hypothèse assez naturelle que nous allons introduire au paragraphe suivant, et qui va nous ramener pour l'éther à l'électrodynamique de Lorentz, va nous montrer en même temps que cette énergie complémentaire est inexistante. En d'autres termes : *il n'y a pas d'autre forme d'énergie, dans l'éther ou dans l'atome, que l'énergie du champ électromagnétique, et l'énergie de courant.*

§ 4. — L'ÉLECTRODYNAMIQUE DE LORENTZ.

L'hypothèse qui nous conduit aux résultats annoncés est que dans l'élément

$$g_{pr} + \frac{1}{2} g_{pr} \mathbf{T} - \mathbf{T}_{pr} + \mathbf{E}_{pr} + \frac{1}{2} \lambda \cdot \Lambda_p \Lambda_r$$

qui sert à former la fonction d'action (36), c'est le premier terme qui constitue l'élément principal, les autres termes étant d'ordre

infinitésimal par rapport à celui-ci. Nous allons alors développer l'expression $\mathcal{A}$ donnée par (36) en nous bornant aux termes des ordres les plus faibles. Nous obtenons :

$$(48) \quad \mathcal{A} = \sqrt{g} \left[1 + \frac{T}{2} + \frac{1}{4} E^{pr} E_{pr} + \frac{1}{4} \lambda g^{pr} \Lambda_p \Lambda_r \right].$$

Nous avons fait ici et nous ferons dorénavant $n = 4$ comme il convient. La démonstration de la formule (48) repose sur le développement du déterminant des éléments

$$\gamma_{pr} + E_{pr}$$

γ_{pr} étant symétrique dans les indices p, r et E_{pr} symétrique gauche.

γ_{pr} a pour partie principale g_{pr} , son expression exacte est

$$g_{pr} + \frac{1}{2} g_{pr} T + \frac{1}{2} \lambda \cdot \Lambda_p \Lambda_r - T_{pr}$$

appelons γ^{pr} le mineur normalisé de γ_{pr} du déterminant des γ_{pr} et désignons par γ ce dernier déterminant.

Dans le développement de $|\gamma_{pr} + E_{pr}|$ nous avons d'abord en prenant les termes γ_{pr} seuls, le déterminant γ lui-même.

En prenant les E_{pr} seuls on obtient le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & E_{01} & E_{02} & E_{03} \\ E_{10} & 0 & E_{12} & E_{13} \\ E_{20} & E_{21} & 0 & E_{23} \\ E_{30} & E_{31} & E_{32} & 0 \end{vmatrix} = (E_{01}E_{23} + E_{02}E_{31} + E_{03}E_{12})^2.$$

Les termes contenant les E_{ik} au 1^{er} et au 2^e degré disparaissent en vertu de la symétrie gauche des E_{ik} . Il reste à évaluer les termes contenant les E_{ik} au 2^e degré.

En appelant $ikrs$ et $mnpq$ deux permutations paires de 1234, ces termes seront :

$$(\gamma_{im}\gamma_{kn} - \gamma_{in}\gamma_{km})(E_{rp}E_{sq} - E_{rq}E_{sp})$$

qu'on peut encore écrire d'après une propriété connue des déterminants :

$$\frac{1}{4} \gamma(\gamma^{rp}\gamma^{sq} - \gamma^{rq}\gamma^{sp})(E_{rp}E_{sq} - E_{rq}E_{sp})$$

mod)
nous remarquons que les sommes telles que $g^{rp}E_{rp}$ sont nulles.

Si nous convenons d'élever les indices à l'aide des γ^{ik} , on

obtient pour expression des termes du second degré dans les E_{ik} :

$$-\frac{1}{4} \gamma (E^{ps} E_{sp} + E^{qs} E_{sq}) = \frac{1}{2} \gamma \cdot E^{ps} E_{ps}.$$

Nous avons donc finalement tous les termes du déterminant $\mathcal{A}^2$.

En prenant la racine carrée et se bornant aux premiers termes du développement, il vient

$$\mathcal{A} = \sqrt{\gamma} \left(1 + \frac{1}{4} E^{ps} E_{ps} \right)$$

remplaçons maintenant les γ en fonction des g , il vient

$$\sqrt{\gamma} = \sqrt{g} \left(1 + \frac{1}{2} T + \frac{1}{4} \lambda g^{pr} \Lambda_p \Lambda_r \right)$$

d'où finalement l'équation (48) qu'il s'agissait de démontrer.

Or nous connaissons une autre expression de $\mathcal{A}$ indépendante de tout choix particulier de cette fonction et que l'on déduit uniquement des relations d'invariance par l'application du théorème de Klein. Elle est donnée par la contraction de l'équation (42)

$$(49) \quad \mathcal{A} = \frac{1}{4\lambda} \sqrt{g} \cdot K + \frac{1}{4} \mathcal{H}^{pr} E_{pr} + \frac{1}{4} \mathcal{C}^p \Lambda_p$$

K est fourni par la contraction de (35)

$$(50) \quad K = \lambda(4 + T).$$

en substituant cette valeur dans (49) on obtient :

$$(51) \quad \mathcal{A} = \sqrt{g} \left(1 + \frac{1}{4} T \right) + \frac{1}{4} \mathcal{H}^{pr} E_{pr} + \frac{1}{4} \mathcal{C}^p \Lambda_p.$$

L'identification de (51) et (48) ne peut être assurée que dans les conditions suivantes :

En premier lieu on a :

$$(52) \quad \mathcal{H}^{pr} = \sqrt{g} \cdot E^{pr}.$$

C'est l'hypothèse de Lorentz dans le cas du vide. Nous sommes conduits à la maintenir aussi dans l'atome.

En second lieu on obtient

$$(53) \quad T = 0.$$

Elle exprime que le tenseur T_i^k lié à l'énergie totale a une

trace nulle (somme des composantes situées sur la diagonale principale du déterminant des T_i^k), tout comme les tenseurs g_i^k et $\mathcal{E}_i^k$.

L'équation (53) entraîne d'importantes conséquences ; en portant (53) dans (50) on a tout d'abord :

$$(54) \quad K = 4\lambda$$

qui exprime la propriété suivante : *les atomes sont des univers fermés à courbure totale constante.*

En portant (54) dans (47), on obtient encore

$$(55) \quad \mathcal{E}_p^r = 0$$

elle exprime *qu'il n'y a pas d'énergie complémentaire.*

Il n'y a que l'énergie du champ électromagnétique, et l'énergie du courant.

En dernier lieu nous avons la curieuse équation

$$(56) \quad \mathcal{C}^p = \lambda \cdot \mathcal{G}^{pr} \cdot \Delta_r$$

qui ne donne rien de nouveau pour l'éther, nous savons qu'il n'est le siège d'aucun courant, mais qui par contre nous fait penser que l'atome doit jouer un rôle tout différent.

§ 5. — L'ÉLECTRODYNAMIQUE DE L'ATOME.

Les lois de l'atome sont contenues dans les formules (56), (52) et (25).

Pour traiter ces équations nous utiliserons le symbole de la dérivation covariante riemannienne, défini par l'équation (39) du chapitre I dans laquelle les composantes Γ_{ir}^p sont remplacées par les symboles de Christoffel. Posons donc :

$$(57) \quad D_r f_i^k = \frac{\partial f_i^k}{\partial x^r} - \left\{ \begin{matrix} p \\ ir \end{matrix} \right\} \cdot f_p^k + \left\{ \begin{matrix} k \\ pr \end{matrix} \right\} \cdot f_i^p$$

On aura à utiliser les équations (41), (42), (43), (47) du chapitre I.

L'équation (25) s'écrira sous la forme plus commode

$$(58) \quad D_r \mathcal{H}^{pr} = \mathcal{C}^p$$

remplaçons H^{pr} par son expression (52) et C^p par son expression (56) il vient

$$(59) \quad g^{rt} D E_{st} = \lambda \Lambda_s.$$

Mais on a d'après (23)

$$(60) \quad E_{st} = D_s \Lambda_t - D_t \Lambda_s.$$

Portons cette valeur dans (59) il vient

$$(61) \quad g^{rt} D (D_s \Lambda_t - D_t \Lambda_s) = \lambda \cdot \Lambda_s.$$

Utilisons encore les formules (59) et (61) du chapitre 1 qui donnent pour le cas particulier de notre dérivation riemannienne :

$$(62) \quad D D_s \Lambda_t - D D_t \Lambda_s = - \left\{ \begin{matrix} l \\ r s t \end{matrix} \right\} \cdot \Lambda_l.$$

Tirons de cette équation $D_r D_s \Lambda_t$ et portons cette valeur dans (61); il vient :

$$(63) \quad g^{rt} D D_s \Lambda_t - \left\{ \begin{matrix} l r \\ r s \end{matrix} \right\} \Lambda_l - g^{rt} D D_t \Lambda_s = \lambda \Lambda_s.$$

Mais le théorème (26) de conservation de l'électricité peut s'écrire

$$(64) \quad D_p C^p = 0$$

et en remplaçant C^p par sa valeur (56)

$$(65) \quad C_g^{pr} D_p \Lambda_r = 0$$

il en résulte que le premier terme du premier membre de (63) s'évanouit, et il reste

$$(66) \quad g^{rt} D D_s \Lambda_t - \left\{ \begin{matrix} r \\ r s l \end{matrix} \right\} \cdot \Lambda^l = - \lambda \cdot \Lambda_s$$

nous rappelons pour mémoire la valeur du symbole contracté à quatre indices du premier membre : [chap. 1, éq. (36)]

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ r s l \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} r \\ l s \end{matrix} \right\}}{\partial x^r} - \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} r \\ l r \end{matrix} \right\}}{\partial x^s} + \left\{ \begin{matrix} q \\ l s \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} r \\ q r \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} q \\ l r \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} r \\ q s \end{matrix} \right\}.$$

Si l'espace de Riemann est l'espace de Minkowski, le premier membre de (66) se réduit au dalembertien du potentiel vecteur, et (66) est l'équation de propagation des ondes électromagnétiques. Mais dans l'atome, nous voyons apparaître un second membre.

Nous pouvons encore donner à (66) une autre forme en nous servant de (35) et (53), c'est

$$(67) \quad g^r_t DD\Lambda_s = -\lambda \cdot T_{st} \cdot \Lambda^t.$$

L'étude mathématique d'une telle équation (1) serait bien nécessaire pour contrôler dans une certaine mesure nos hypothèses.

Cette étude est difficile. D'abord nous n'avons pas affaire à des conditions frontières comme dans les problèmes analogues de physique mathématique ; l'image euclidienne de l'atome, telle que nous la repérons, a bien des bords, mais ces bords n'ont pas de réalité physique ; l'atome est en réalité un univers fermé et sans frontière.

En second lieu l'équation (67) considérée isolément ne peut donner une solution rigoureuse puisque le système complet des équations de la dynamique de l'éther contient $\frac{n(n+3)}{2}$ équations déterminant les g_{ik} et Λ_i ,

Nous pouvons toutefois utiliser le fait que les g_{ik} n'ont que des variations infinitésimales avec le temps.

Le problème le plus inquiétant est de reconnaître dans quelle mesure les lois trouvées restent compatibles avec les phénomènes de quanta. Les quanta n'apparaissent nulle part dans la théorie qui précède ; on ne voit pas même pourquoi la matière doit apparaître sous forme granulaire.

Des hypothèses supplémentaires permettront peut-être d'obtenir la conciliation désirable avec la théorie des quanta. La plus commode de ces hypothèses serait sans doute d'admettre que la constante cosmologique est susceptible de variations discontinues s'étendant sur une échelle de valeurs caractéristiques de chaque atome.

A chaque saut de λ correspondrait une discontinuité pour la densité de courant $\mathcal{C}$ et par suite un saut d'énergie à l'intérieur de l'atome.

Il resterait à voir par quel mécanisme cette discontinuité se transmettrait à l'éther, à déterminer pourquoi chaque discontinuité est un nombre entier de quanta et enfin d'après quelle loi se produiraient les discontinuités.

(1) HADAMARD, *Lectures on Cauchy's Problem*. New Haven. Yale University Press 1923.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Application des équations intégrales à la Physique mathématique.

Vu et approuvé :

Paris, le 17 février 1926.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
M. MOLLIARD.

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
P. LAPIE.
